أخي المسلم أختي المسلمة

ساهم في نشر هذا الكتاب

لعل الله يرجع لهذه الأمة

سابق عهدها

الميكانيكا التحليليّة

تأليف

أ. د/إسماعيل حسانين

أستاذ الرياضيات بجامعة أسيوط

وكلية التربية للبنات - الرياض

أ. د/أبو النور عبدالله

أستاذ الرياضيات بجامعة جنوب الوادي

وكلية التربية للبنات - جازان

الدكتور/فؤاد سيّد

أستاذ الرياضيات المساعد بجامعة أسيوط



فهرس المحتويات

- ❖ مقدمة الكتاب ١١

الفصل الأول

- ❖ مقدمة ١٧
- ❖ القيود وأنواعها ٢١
- ❖ أنواع الأنظمة الميكانيكية ٢٣
- ❖ الإحداثيات المعممة ٢٧
- ❖ معادلات التحويل بين الإحداثيات ٢٧
- ❖ السرعات المعممة ٣٠
- ❖ درجات الحرية للمجموعة ٣٠
- ❖ الإزاحات الصغيرة في الإحداثيات ٣٤
- ❖ القوى المعممة ٣٥
- ❖ طاقة الحركة وكمية الحركة المعممة ٣٦
- ❖ المجموعات المحافظة والمجموعات الغير محافظة ٤٢
- ❖ أمثلة وتمارين ٤٩

الفصل الثاني

- ❖ معادلات لاجرانج للمجموعات تامة التقييد ٥٥
- ❖ تطبيقات على استخدام معادلات لاجرانج ٩٦
- ❖ معادلات لاجرانج للمجموعات غير تامة التقييد ١٠٥
- ❖ معادلات لاجرانج والقوى الدفعية ١٠٩

الفصل الثالث

- ❖ مقدمة ١٢١
- ❖ تعريف كمية الحركة المعممة ١٢٢
- ❖ تعريف دالة هاملتون ١٢٣
- ❖ استنتاج معادلات هاملتون ١٢٤
- ❖ أمثلة وتمارين ١٦٥

الفصل الرابع

- ❖ مقدمة ١٦٩
- ❖ مبدأ هاملتون للتأثير الأقل (أو الفعل الأقل) ١٦٩
- ❖ قاعدة(مبدأ) هاملتون ١٧٤
- ❖ استنتاج معادلات لاجرانج من مبدأ هاملتون ١٧٥

محتويات الكتــاب

❖ أمثلة وتمارين ١٩٧

الفصل الخامس

❖ الإحداثيات ا لدورية أو المهملة ٢٠٢
❖ طرق دراسة المسائل الديناميكية المحتوية على الإحداثيات المهملة ٢٠٣
❖ دالة ومعادلات راوث ٢١٢

الفصل السادس

❖ التحويلات القانونية أو تحويلات التماس ٢٣١
❖ الدوال المولدة ٢٣٦
❖ شرط التحويلات القانونية ٢٤٥
❖ معادلة هاملتون- جاكوبي ٢٧١
❖ أمثلة وتمارين ٢٩٥

الفصل السابع

❖ أقواس لاجرانج ٢٩٩
❖ أقواس بواسون ٣٠٠
❖ خواص أقواس بواسون ٣٠٢
❖ اختبار قانونية التحويل باستخدام أقواس بواسون ولاجرانج ٣٠٥
❖ أمثلة وتمارين ٣١١

الفصل الثامن

❖ تعريفات ٣١٥
❖ قانون العزم والعجلة الزاوية ٣١٥
❖ طاقة حركة جسم يتحرك حركة مستوية ٣١٥
❖ كمية الحركة الزاوية لجسم متماسك ٣١٧
❖ دراسة حركة البندول المركب ٣١٨
❖ دراسة كرة تتدحرج على مستوى مائل خشن ٣٢٢
❖ الملاحق ٣٢٥
❖ المراجع ٣٦٥

مقدمة الكتاب

الحمد الله على نعمائه التي لا تحصي ولا تعد والصلاة والسلام على معلمنا ونبينا محمد صلي الله عليه وسلم الذي تركنا على المحجة البيضاء ليلها كنهارها لا يزيغ عنها إلا هالك . . . ثم أما بعد .

هذا المؤلف هو حصيلة مجهود من تدريس مادة هذا الكتاب لا كثر من ربع قرن وهو واحد من سلسة مؤلفات باللغة العربية في أحد فروع الرياضيات إلا وهو الميكانيكا التحليلية والتي تتميز بأنها تركز بصورة رئيسيه على مبادئ عامة (تفاصليه أو تكاملية) ومن ثم تنتج المعادلة أو المعادلات التفاضلية للحركة .

والميكانيكا التحليلية لها تطبيقات عديدة في الرياضيات والفيزياء والهندسة وخاصة في ميكانيكا الكم والميكانيكا الموجية والميكانيكا الإحصائية وحساب التغاير وحساب الامثلية والأنظمة الدنياميكية والمعادلات التفاضلية . . . الخ .

والطرق المقدمة في مادة الكتاب هي من الطرق الرياضية العامة التي تعتمد على معادلات لاجرانج وهاملتون والتي هي تطوير لقوانين نيوتن والتي تصيغ المسائل الرياضية صياغة حديثة تؤدى إلى سهولة التعامل معها خاصة المسائل الصعبة، وتمتاز أيضاً بسهولة تطبيقها لإى نوع من الاحداثيات . وهذا ما عرضناه في مادة هذا الكتاب والذي يتكون من عدة أبواب بالإضافة إلى بضع مرفقات .

ففي الباب الأول يتعرف القارئ على مفاهيم عامة للقيود تعريفها وأنواعها، والاحداثيات المعممة ودرجات الحرية والأنظمة الديناميكية الهولونومية وغير الهولونومية والاسكليرونوميه والمجموعات المحافظة وغير المحافظة واحتوى هذا الفصل أيضاً على مجموعة من الأمثلة التوضيحية .

أما الباب الثاني تضمن اشتقاق معادلات لا جرانج للمجموعات تامة التغيير وغير تامة التغيير وعلاقة الشغل المبزول بالقوي المؤثر والقوى المعممة وذيل هذا الباب بمجموعة من الأمثلة .

في الباب الثالث : اختص هذا الباب بمادلات هاملتون وقد إستهللناه بتعريف كمية الحركة المعمة ودالة هاملتون ثم إستنتاج معادلات هاملتون وإعطاء مجموعة من التطبيقات على دالة هاملتون وعلاقة معادلات هاملتون بداله لاجرانج .

الباب الرابع : خصصنا هذا الباب لدراسة مبدأ هاملتون وحساب التغاير وكيفية إستنتاج معادلات أويلر لاجرانج من مبدأ هاملتون واحتوي هذا الفصل كذلك على العديد من الأمثلة على الأنظمة الدنياميكية والتطبيقات الهندسة كتطبيقات على مبدأ هاملتون للفعل الأقل .

في الباب الخامس : اشتمل على الاحداثيات الدورية أو المهملة وطريقة دراسة المسائل الدنياميكية المحتوية على هذه الاحداثيات ، واشتمل هذا الباب على دالة ومعادلات راوث والعديد من التطبيقات .

الباب السادس : خصص لإيجاد التحويلات القانونية (تحويلات التماس) والدوال المولدة . وكذلك تعرضنا للشروط التي تجعل التحولات قانونية ، واختبار قانونية التحويل _ وإيجاد معادلات هاملتون جاكوب وذيل بالعديد من الأمثلة .

الباب السابع : خصص لتعريف أقواس بواسون ولا جرانج وخصائصها واختبار قانونية التحويل باستخدامها وفي نهاية الباب تم إعطاء العديد من الأمثلة .

الباب الثامن والأخير : أختص لدراسة حركة جسم متماسك باستخدام معادلات لاجرانح حيث إستهللنا هذا الباب بتعريفات مهمة مثل قانون العزم والعجلة الزاوية ، وطاقة الحركة ، وكمية الحركة الزاوية ثم دراسة حركة البندول المركب وأمثلة أخري .

وفي جميع أبواب الكتاب حرصنا على وجود العديد من الأمثلة والتمارين وإعطاء عدة مرفقات تحوى العلاقة بين الإحداثيات في الأنظمة المختلفة وتطبيقات على حساب التغاير .

وأخيراً نتمنى أن نكون قد وفقنا في وضع مادة هذا الكتاب فإن كان هناك نقص أو خلل فهذه صفة أبن آدم والكمال لله وحده سبحانه وتعالي .

وعلى الله التوفيق

المؤلفون



* مقدمة
* القيود وأنواعها
* أنواع الأنظمة الميكانيكية
* الإحداثيات المعممة
* معادلات التحويل بين الإحداثيات
* السرعات المعممة
* درجات الحرية للمجموعة
* الإزاحات الصغيرة في الإحداثيات
* القوى المعممة
* طاقة الحركة وكمية الحركة المعممة
* المجموعات المحافظة والمجموعات الغير محافظة
* أمثلة وتمارين

الفصل الأول

مقدمة Introduction

ليس هناك تفسير واحد متفق عليه لمصطلح "الميكانيكا التحليلية" في مؤلفات الميكانيكا. فبعض المؤلفون يطابقون الميكانيكا التحليلية بالميكانيكا النظرية. ويرى البعض الآخر بأن علم الديناميكا التحليلية يختص باستنتاج طرق رياضية عامة لدراسة حركة المجموعة الديناميكية باستخدام طرق عامة تعتمد على ما يسمى بمعادلات لاجرانج وهاملتون بدون التطبيق المباشر لقوانين نيوتن للحركة بالرغم من أن هذه المعادلات هي في الحقيقة تطوير لهذه القوانين. وتستخدم الميكانيكا التحليلية لسهولة تطبيقها لأي نوع من الإحداثيات.

ويجب أن نتذكر الحركة الديناميكية في ديناميكا نيوتن كنا نتبع خطوات معينة لدراسة الحركة منها اختيار محاور مناسبة سواء ثابتة أو دوارة ومعها نختار إحداثيات مناسبة أيضاً كارتيزية أو اسطوانة أو كروية ... ثم أخذ الجسيم في وضع عام وبيان القوة المؤثرة عليه ثم نحدد صيغ مركبات العجلة في الإحداثيات المناسبة ثم نطبق قوانين نيوتن ثم نكامل معادلات الحركة مع استخدام الشروط الابتدائية فنحصل على حل المسألة من وضع الجسم.

وتتميز طريقة عرض الميكانيكا التحليلية بأنها ترتكز بصورة رئيسية على مبادئ عامة (تفاضلية أو تكاملية). ثم تنتج المعادلات التفاضلية الأساسية للحركة من هذه المبادئ بطريقة تحليلية. ويتكون المحتوى الأساسي للميكانيكا التحليلية من عرض المبادئ العامة للميكانيكا، واستنتاج المعادلات التفاضلية الأساسية للحركة من هذه المبادئ، ودراسة المعادلات نفسها وطرق تكاملها.

ويجب أن نتذكر الحركة الديناميكية في ديناميكا نيوتن كنا نتبع خطوات معينة لدراسة الحركة منها اختيار محاور مناسبة سواء ثابتة أو دوارة ومعها نختار إحداثيات مناسبة أيضاً كارتيزية أو إسطوانية أو كروية ... ثم أخذ الجسيم في وضع عام وبيان القوة المؤثرة عليه ثم نحدد صيغ مركبات العجلة في الإحداثيات المناسبة ثم نطبق قوانين نيوتن ثم نكامل معادلات الحركة مع استخدام الشروط الابتدائية فنحصل على حل المسألة من وضع الجسم.

فلقد درسنا في مقررات الميكانيكا السابقة حركة الجسيمات مستخدمين قوانين الحركة لنيوتن التي يمكن تلخيصها على النحو التالي:

١- كل جسيم يظل على حالته من السكون أو الحركة الخطية المنتظمة (أي الحركة بسرعة ثابتة) ما لم تؤثر عليه قوة خارجية.

ويبدو هذا معقولا ومتفقا مع خبرتنا اليومية، فنحن نعلم أن الأجسام الساكنة تستمر في حالة السكون حتى تتسبب قوة خارجية ما في حركتها، كلنا يدرك هذه الحقيقة.

أما الجزء الثاني من القانون فإنه أكثر ذكاءا وهو ما يلي:

يستمر الجسيم المتحرك في حركته في خط مستقيم بسرعة ثابتة ما تؤثر عليه قوة محصلة تختلف عن الصفر.

ولكن يبدو أن الخبرة العامة تناقض هذا، فنحن نعلم أن أي شئ لا يستمر في حركته بدون تغيير إلى الأبد. فإذا دحرجت كرة على الأرض فإنها سرعان ما تتوقف.

كذلك فإن الجسم المعدني الذي ينزلق على منضدة ملساء يتباطأ تدريجيا ليتوقف في نهاية الأمر. وهناك حالات مشابهة كثيرة أخرى.

ومع ذلك فإن كل من الأمثلة المذكورة ليس اختبارا صحيحا لقانون نيوتن فهناك قوة تؤثر على كل من هذه الأجسام تحاول وقف حركته الأفقية وهي قوة الاحتكاك.

ونحن جميعا نعلم أنه كلما زادت الاحتياطات التي نتخذها للتخلص من هذه القوة كلما قلت سرعة وصول الجسيم إلى حالة السكون. وقد عمم نيوتن هذه الملاحظة على الحالة التي تختص فيها قوة الاحتكاك واستنتج أنه إذا كانت هذه الحالة ممكنة فإن الجسيم المتحرك لن يتوقف أبدا.

٢- إذا كانت $\vec{F}$ هي القوة (الخارجية) المؤثرة على جسيم كتلته m، فتحرك نتيجة لذلك بسرعة $\vec{V}$ يكون:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}(\vec{P})$$

حيث $\vec{P} = m\vec{v}$ تسمى كمية الحركة.

وإذا كانت m لا تعتمد على الزمن (أي ثابتة) فإنه يصبح لدينا:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

حيث $\vec{a}$ هي العجلة التي يتحرك بها الجسيم.

٣- إذا أثر جسيم 1 على جسيم 2 بقوة $\vec{F}_{12}$ تعمل في اتجاه الخط الواصل بين الجسمين، بينما أثر الجسيم 2 على الجسيم 1 بالقوة $\vec{F}_{21}$ فإن:

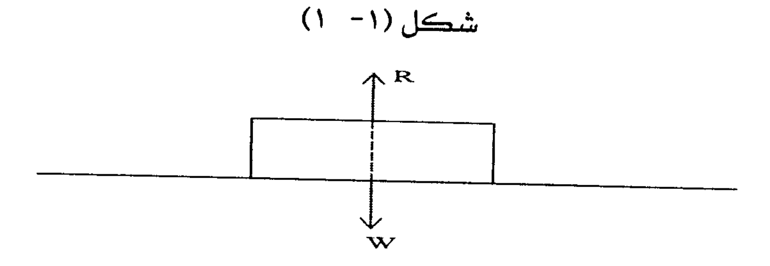
$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

وبصيغة أخرى:

لكل فعل يوجد "رد فعل" مساو له في المقدار ومضاد له في الاتجاه.

في شكل (١- ١) التالي يدفع القالب المنضدة إلى أسفل (هذه هي القوة الأولى) فتدفع المنضدة القالب إلى أعلى (هذه هي القوة الثانية).

شكل (١- ١)



وقد أكتشف في أوائل القرن العشرين أن النتائج النظرية المختلفة التي تستنتج من قوانين نيوتن لا تتفق مع بعض النتائج المستنبطة من نظريات الكهرومغناطيسية والظواهر الذرية، والتي أمكن إثبات صحتها عمليا. وقد أدت هذه التناقضات إلى ظهور الميكانيكا النسبية لأنشتين Theory of relativity التي غيرت مفاهيم الزمن والفراغ، كما أدت إلى ظهور ميكانيكا الكم (Quantum mechanics) والميكانيكا الإحصائية(Statistical mechanics) وعلم الإلكتروديناميكا (electrodynamics)

أما بالنسبة للأجسام التي تتحرك بسرعات أقل بكثير من سرعة الضوء والتي لها أبعاد كبيرة إذا ما قورنت بأبعاد الذرات والجزيئات، فإن "ميكانيكا نيوتن" أو "الميكانيكا الكلاسيكية" تظل صالحة، لهذا السبب فإنها لا تزال محتفظة بمكانة هامة في العلوم والهندسة.

الغرض من هذا المقرر هو معالجة بعض المسائل باستخدام طرق عامة وبصفة خاصة تلك التي تعزى إلى لاجرانج وهاملتون حيث استطاع لاجرانج أن يكتب معادلات الحركة في صورة جديدة وعامة ويصل إلى نفس الهدف دون الاعتماد على صيغ العجلة في الإحداثيات المختلفة. وتطبق معادلات لاجرانج بدون تغير صورتها الرياضية عند استخدام أي نوع من الإحداثيات. حيث أدخل ما يسمى بالإحداثيات المعممة.

والميكانيكا التحليلية يمكن أن تختزل إلى ميكانيكا نيوتن وتتميز بالسهولة وعلاقتها الوطيدة سواء من الناحية النظرية أو التطبيقية ببعض المجالات الحرفية مثل ميكانيكا الكم، الميكانيكا الإحصائية والإلكترودیناميكا.

ودراسة الميكانيكا التحليلية تعتمد على عدة مفاهيم وسنشرحها بالتفصيل ومن هذه المفاهيم :

المجموعة الديناميكية - الإحداثيات المعممة - الطاقة وصياغتها بدلالة الإحداثيات المعممة - معادلات لاجرانج ومعادلات هاملتون ومعادلات هاملتون جاكوب وهي تمثل معادلات الحركة في الديناميكا التحليلية. وهي لا تغيرية الشكل وهي مصاغة بدلالة الإحداثيات المعممة - تكامل معادلات الحركة واستخدام الشروط الابتدائية فنحصل على الموضع وهو ما حصلنا عليه في ميكانيكا نيوتن.

ونسأل الله العلي القدير أن ينفعنا بما علمنا ويعلمنا ما ينفعنا ويزدنا علما ويلحقنا بالصالحين.

بعض المفاهيم العامة في الميكانيكا التحليلية

١.١ مفهوم الأنظمة (المجموعة) الديناميكية:

هو مفهوم يطلق على الجسيمات المتحركة في الفراغ تحت تأثير قوى خارجية أو داخلية.

وقد توجد قوى ناتجة عن وجود قيود (مثل حركة جسيم على سطح معلوم) مثل قوى ردود الأفعال.

وحيث أن المجموعة الديناميكية تتخذ مواضع مختلفة عند تغير الزمن وهذه المواضع المختلفة عند أي لحظة زمنية معينة ما نركز عليه تحت شروط ابتدائية معينة.
ويتعين موضع المجموعة الديناميكية عند أي لحظة بعدد المتغيرات أو الإحداثيات مثل (x, y, z) أو (r, θ, ϕ) أو (ρ, ϕ, z) وإذا كان جسيمان ستكون ستة وهكذا ... إذا كان هناك N جسيم فإن عدد المتغيرات هي 3 N.

وقد أدخل لاجرانج مفهوم الإحداثيات المعممة باسلوب عام لتعيين موضع المجموعة الديناميكية بدون التعرض لنوع الإحداثيات وتصنف المجموعات الديناميكية إلى نوعين إحداهما حرة لا توجد قيود على الحركة والأخرى مقيدة.

ونظراً لأن الحركة للمجموعة الديناميكية تخضع لأنواع مختلفة من القيود فإن المجموعة الديناميكية تصنف طبقاً لنوع القيود .

٢-١ القيود وأنواعها Constraints

المجموعة الديناميكية قد تكون حرة أي بدون أي قيود عليها مثل حركة جسيم مقذوف من نقطة على سطح الأرض تحت تأثير الجاذبية. وهناك مجموعة ديناميكية مقيدة وهي التي يكون هناك قيود معينة تؤدي أن يكون هناك شروط على مواضع وسرعة جسيمات المجموعة.

والقيد هو عبارة عن معادلة متغيراتها هي الإحداثيات المستقلة حيث أن القيد شرط أو شروط مفروضة على المنظومة الديناميكية.

يمكن تقسيم القيود إلى نوعين فإذا كان متجه الموضع هو $\vec{r}_\alpha$ للجسيم α وسرعته $\dot{\vec{r}}_\alpha$ من الجسيمات حيث $\alpha = 1, 2, ..., N$ فيمكن التعبير عن الشروط أو القيود في الصورة :

$$f\left(\vec{r}_\alpha, \dot{\vec{r}}_\alpha, t\right) = 0$$

والتي تسمى معادلة القيد ومعنى ذلك أن مواضع وسرعات الجسيمات لا تأخذ إلا قيماً معينة تحقق وتتفق مع هذه العلاقة المعطاة. ومن ثم سوف نصنف القيود تبعاً لما يلي :

أ - قيود تفاضلية (أو كينماتيكية) Differential (or Kinematical constraints)

إذا كانت معادلة القيد التفاضلي في الصورة

$$f\left(\vec{r}_\alpha, \dot{\vec{r}}_\alpha, t\right) = 0 \qquad \alpha = 1, 2, ..., N$$

ظهور السرعات $\dot{\vec{r}}_\alpha$ صراحة في معادلة القيد سمي بالقيد الكينماتيكي والذي يمكن تحويله إلى نوع آخر من القيود إذا أمكن تكامل معادلة القيد والذي سنسميه بالقيد الهندسي وسميت أيضاً المجموعة بالمجموعة الديناميكية الهولونومية Holonomic . أما إذا كان معادلة القيد غير قابلة للتكامل فنسمي المجموعة بالمجموعة الديناميكية غير الهولونومية.

ب - القيود الهندسية Geometric Constrains

معادلة القيد في الصورة :

$$f\left(\vec{r}_\alpha, t\right) = 0$$

وهنا في معادلة القيد لا تظهر السرعة صراحة وتسمى المجموعة Holonomic هولونومية. مثال ذلك حركة خرزة مقيد الحركة على منحنى قطع مكافئ حيث إن الخرزة تتحرك في مستوى فيكون لها احداثيين معممين x, y أي درجتان حرية ولوجود القيد الهندسي (معادلة القطع $y^2 = 4ax$) فإن درجتي الحرية تقل بمقدار درجة ويلاحظ وجود ارتباط بين القيود وبعضها البعض حيث أن القيد الهندسي معطى بالمعادلة السابقة ويعبر عنه بمتجهات موضع عناصر المنظومة. والقيد التفاضلي يمكن

الحصول عليه من القيد الهندسي بتفاضل القيد الهندسي والعكس قد يكون صحيح أو لا يكون.

❖ القيد المستقر زمنياً :

إذا لم يظهر الزمن t صراحة في معادلة القيد سمي بالقيد المستقر زمنياً وسميت المجموعة الديناميكية بالمجموعة الاسكليرونومية Scleronomic.

❖ القيد غير المستقر زمنياً :

إذا ظهر الزمن t صراحة سمي القيد بالقيد غير المستقر زمنياً وسميت المجموعة بالمجموعة الديناميكية الريونمية Rheonomic.

١-٣ أنواع الأنظمة الميكانيكية كما سبق ملخصها فيما يلي :

١-٣-١ الأنظمة الهولونومية Holonomic system

أنظمة ميكانيكية مفروض عليها قيود هندسية أو تفاضلية يمكن تكاملها أو الاثنين معاً وتكون الإحداثيات المعممة مستقلة والأنظمة المفروض عليها قيود هندسية فقط تكون هولونومية.

١-٣-٢ الأنظمة غير الهولونومية

أنظمة مفروض عليها قيود لا يمكن تكاملها.

١-٣-٣ الأنظمة الزمنية وغير الزمنية

الأنظمة التي يظهر الزمن صراحة سميت زمنية والتي لا يظهر الزمن صراحة سميت غير زمنية.

١-٣-٤ أنظمة تامة القيد وغير تامة القيد

يقال أن المنظومة تامة القيد عندما يمكن التعبير عن جميع القيود المفروضة على المنظومة بمعادلات في الصورة $f(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) = 0$ أو صورة مكافئة وإلا يقال أنها غير تامة القيد.

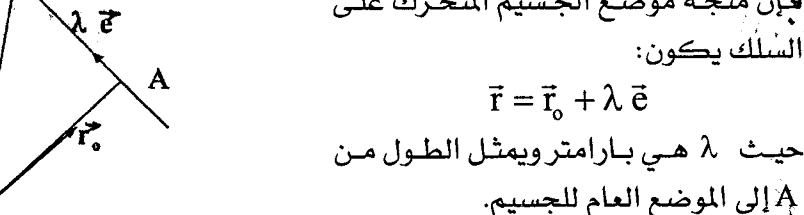
مثال ١:

جسيم يتحرك على سلك مستقيم ثابت في الفراغ. أوجد معادلة القيد

الحل

بفرض أن $\vec{e}$ متجه الوحدة في اتجاه السلك، A نقطة ثابتة متجه موضعها $\vec{r}_0$ فإن متجه موضع الجسيم المتحرك على السلك يكون:

شكل (١- ٢)



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\,\vec{e}$$

حيث λ هي بارامتر ويمثل الطول من A إلى الموضع العام للجسيم.

وبذلك يمكن اعتبار معادلة القيد كالتالي:

$$\vec{r} - \vec{r}_0 - \lambda\ \vec{e} = 0$$

وهذا القيد هو قيد هندسي وهو مستقر زمنياً وبذلك تكون المجموعة هولونومية أسكليرونومية.

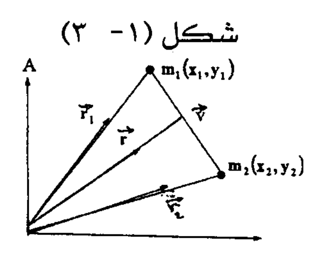
مثال ٢:

يتحرك جسيمان يصل بينهما قضيب طوله ثابت a في مستوى وبحيث تكون سرعة منتصف القضيب دائماً في اتجاه الخط الواصل بين الجسيمين. أوجد معادلة القيد ونوعه .

الحل

إحداثيات منتصف القضيب هي:

شكل (١- ٣)



$$\vec{r} \equiv \{(x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2\}$$

$$\equiv (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2$$

وبذلك تكون سرعة منتصف القضيب هي $\dot{\vec{r}}$ تعطى من:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}_2}{2}$$

$$= \left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2}, \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{2} \right) \quad (1)$$

لدينا طول القضيب a ثابت فيكون:

$$a^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \tag{2}$$

∵ سرعة منتصف القضيب في اتجاه الخط الواصل بين الجسمين فيكون

ميل السرعة = ميل القضيب

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\dot{y}_2 + \dot{y}_1}{\dot{x}_2 + \dot{x}_1} \tag{3}$$

بالتعويض في (2) نحصل على

$$\frac{a^2}{(x_1 - x_2)^2} = 1 + \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\dot{y}_2 + \dot{y}_1}{\dot{x}_2 + \dot{x}_1}\right)^2$$

لذلك تكون معادلة القيد

$$1 + \left(\frac{\dot{y}_2 + \dot{y}_1}{\dot{x}_2 + \dot{x}_1}\right) - \frac{a^2}{(x_1 - x_2)^2} = 0$$

وهي معادلة القيد وأنه مستقر زمنياً لا يمكن تكامله ومن ثم فهو كينماتيكي والمجموعة سكليرونومية وغير هولونومية.

مثال ٣:
جسيمان متصلان بساق خفيفة ذات طول ثابت a· أوجد معادلة القيد

الحل

شكل (١- ٤)

(x_1, y_1, z_1)

(x_2, y_2, z_2)

معادلة القيد تكون

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2) = a^2$$

وهي مجموعة هولونومية . سكليرونومية

أما إذا كانت طول الساق تتغير مع الزمن بحيث تكون $b\cos\omega t$ فإن معادلة القيد تصبح:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2) = b^2 \cos^2 \omega t$$

وهي مجموعة هولونومية . ريونومية.

مثال ٤:

في كل من الحالات التالية، اذكر هل التقييد تام أم غير تام وبين سبب اجابتك.
أ- خرزة تتحرك على سلك دائري. ب - جسيم ينزلق إلى أسفل مستوى مائل تحت تأثير الجاذبية الأرضية. جـ - جسيم ينزلق إلى أسفل كرة من نقطة بالقرب من القمة تحت تأثير الجاذبية الأرضية.

الحل

أ- في حالة خرزة تتحرك على سلك دائري يكون القيد تام ، وذلك لأن الخرزة التي يمكن اعتبارها نقطة مادية أو جسيما تكون مقيدة الحركة على سطح السلك الدائري.

ب- في حالة جسيم ينزلق إلى أسفل مستوى مائل تحت تأثير الجاذبية الأرضية يكون القيد تام ، وذلك لأن الجسيم يكون مجبرا على الحركة على سطح، والسطح في هذه الحالة مستوى.

جـ- في حالة جسيم ينزلق إلى أسفل كرة من نقطة بالقرب من القمة تحت تأثير الجاذبية الأرضية يكون القيد غير تام ، وذلك لأن الجسيم بعد أن يصل إلى موضع معين على الكرة سوف يتركها. ويمكن معرفة ذلك بطريقة أخرى، إذا لاحظنا أنه إذا كان $\vec{r}$ هو متجه الموضع للجسيم بالنسبة لمركز الكرة لنقطة أصل، وكان a هونصف قطر الكرة، فإن الجسيم يتحرك تحت شرط $r^2 \geq a^2$. وهذه حالة تقييد غير تام وذلك لأن هذه الحالة لا تتبع معادلة التقييد التام وهي:

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N, t) = 0$$

أما حالة التقييد التام يجب أن يكون $r^2 = a^2$.

مثال ٥:

في كل من الحالات التالية بين ما إذا كان تقييد الحركة تاما أو غير تاما وضحا السبب. أ - جسيم مقيد الحركة تحت تأثير الجاذبية الأرضية على السطح الداخلي لمجسم قطع مكافئ دوراني رأسه إلى أسفل. ب - كرة تتدحرج ويمكن أن تنزلق إلى أسفل سطح مائل. جـ - جسيم ينزلق تحت تأثير الجاذبية الأرضية على السطح الخارجي لمخروط رأسي مقلوب. د - كرة تتدحرج إلى أسفل على مستوى رأسي مثبت .
هـ - جسيم ينزلق على مجسم القطع الناقص تحت تأثير الجاذبية الأرضية.

الحل

سوف نذكر في كل الحالات حالة التقيد وعلى الطالب أن يذكر السبب:

أ- في حالة جسيم مقيد الحركة تحت تأثير الجاذبية الأرضية على السطح الداخلي لمجسم قطع مكافئ دوراني رأسه إلى أسفل التقييد تام.

ب- في حالة كرة تتدحرج إلى أسفل على مستوى رأسي مثبت التقييد تام.

جـ- في حالة جسيم ينزلق تحت تأثير الجاذبية الأرضية على السطح الخارجي لمخروط رأسي مقلوب التقييد تام.

د- في حالة كرة تتدحرج ويمكن أن تنزلق إلى أسفل سطح مائل التقييد غير تام.

هـ- في حالة جسيم ينزلق على مجسم القطع الناقص تحت تأثير الجاذبية الأرضية التقييد غير تام.

٤-١ الإحداثيات المعممة: Generalized coordinates

رأينا أن موضع الجسيم في الفضاء (الفراغ) يمكن تعيينه تعينا كاملا بثلاثة إحداثيات. وقد تكون هذه، ديكارتية (كرتيزية) أو كروية أو أسطوانية أو في الحقيقة أية ثلاثة بارامترات مختارة بصورة ملائمة، ونحتاج إلى احداثيين فقط إذا كان الجسيم مقيد الحركة في مستو أو سطح ثابت. بينما إذا كان الجسيم يتحرك على خط مستقيم أو منحنى ثابت فعندئذ يكفي إحداثي واحد.

في حالة منظومة ميكانيكية متكونة من N من الجسيمات نحتاج إلى 3N من الإحداثيات لتعيين مواضع جميع الجسيمات في وقت واحد بصورة كاملة. ومعنى هذا أن موضع المجموعة الميكانيكية يتحدد إذا علم 3N من الكميات القياسية المستقلة والتي تسمى إحداثيات معممة وسوف نرمز لهذه الإحداثيات بالرموز: $q_1, q_2, ...q_n$ وقد يكون الإحداثي q_k زاوية أو مسافة.

٥-١ معادلات التحويل بين الإحداثيات:

إذا كان $\vec{r}_i$ هو متجه موضع الجسيم رقم i في مجموعة ميكانيكية مكونة من N من النقط المادية. فيمكن كتابة متجه الموضع $\vec{r}_i$ بالنسبة لمجموعة المحاور الكرتيزية o x y z كالتالي:

$$\vec{r}_i = x_i\,\vec{i} + y_i\,\vec{j} + z_i\,\vec{k} \qquad (1)$$

حيث $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ هي متجهات الوحدة في اتجاه المحاور الثلاثة المتعامدة.

وإذا رمزنا للإحداثيات المعممة بالرمز:

$$q_1, q_2, \dots\dots\dots q_n \qquad (2)$$

فإن علاقات التحويل بين الإحداثيات الكرتيزية x_i, y_i, z_i في الإحداثيات المعممة المذكورة في (2) يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots\dots\dots q_n, t) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots\dots\dots q_n, t) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots\dots\dots q_n, t) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

حيث t يمثل الزمن ويمكن كتابة (3) في صيغة اتجاهيه على الصورة:

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q_1, q_2, \dots\dots\dots q_n, t) \qquad (4)$$

أو أكثر اختصارا على الصورة:

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q_\alpha, t) \qquad (5)$$

$$\nu = 1,2\dots N \quad , \quad \alpha = 1,2,\dots\dots, n$$

مثال١:

ما هي مجموعة الإحداثيات المعممة التي تحدد تحديدا كاملا حركة (خرزة) مقيدة الحركة على سلك دائري.

الحل

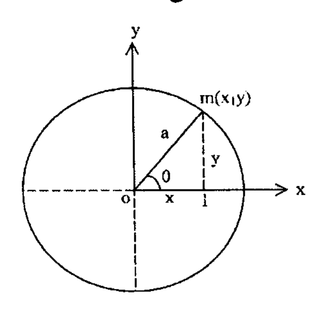
نفرض أن السلك الدائري كما بالرسم يقع في المستوى xy. ونفرض أن الخرزة التي تتحرك على السلك الدائري كتلتها m وأنها عند أي لحظة زمنية t احداثياتها هي x,y.

وعلى ذلك تصبح معادلات التحويل هي على الصورة:

$$x = a\cos\theta \quad , \quad y = a\sin\theta$$

حيث a نصف قطر السلك الدائري. وعلى ذلك يمكن تحديد الحركة تحديدا تاما باستخدام الإحداثي المعمم θ.

شكل (١- ٥)

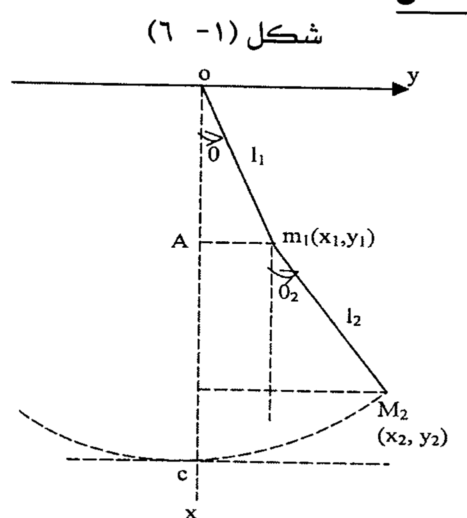


مثال ٢:
ما هي مجموعة الإحداثيات المعممة التي تحدد تحديدا كاملا حركة كتلتين في بندول مزدوج مقيد الحركة في مستوى. ثم أكتب معادلات التحويل:

الحل

البندول المزدوج (لكتلتين) ومقيد الحركة في مستوى يمكن رسمه على الصورة المبينة بالشكل المجاور.

شكل (١- ٦)



واضح من الرسم أن الإحداثيان θ_1 , θ_2 يحددان تحديا كاملا موضعي الكتلتين m_1 , m_2. إذن يمكن اعتبار θ_1 , θ_2 هما الإحداثيين المعممين المطلوبين.

كتابة معادلات التحويل:

يمكن اختيار مجموعة المحاور oxy كما هو مبين بالرسم ونفرض أن: $(x_1 , y_1) , (x_2 , y_2)$ هما الإحداثيات الكرتيزية لكل من m_1 , m_2 على الترتيب.

عندئذ نرى من شكل (١- ٦) أن:

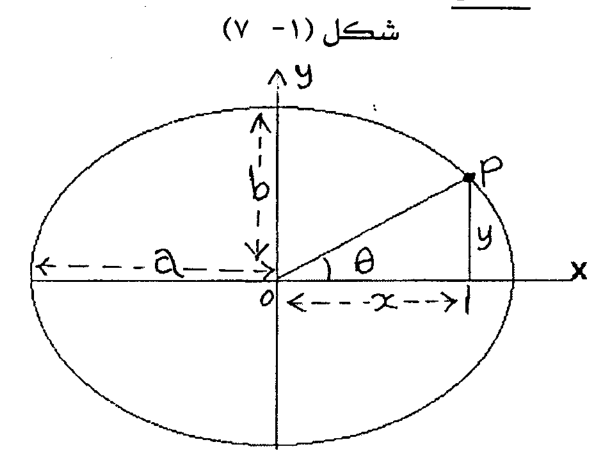
$$x_1 = \ell_1 \cos \theta_1 \quad , \quad y_1 = \ell_1 \sin \theta_1 \quad ,$$
$$x_2 = \ell_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \cos \theta_2 \quad ,$$
$$y_2 = \ell_1 \sin \theta_1 + \ell_2 \sin \theta_2 \quad ,$$

وهذه هي معادلات التحويل المطلوبة.

مثال ٣:
ما هي مجموعة الإحداثيات المعممة التي تحدد تحديدا كاملا حركة جسيم مقيد الحركة على قطع ناقص.

الحـل

شكل (١- ٧)



نفرض أن القطع الناقص في المستوى oxy كما في الرسم. ونفرض أن الجسيم الذي يتحرك على القطع الناقص له كتلة m وأنه على أي لحظة زمنية t احداثياته الكرتيزية هي x,y وعلى ذلك تصبح معادلتي التحويل هي:

$$x = a\cos\theta \quad , \quad y = b\sin\theta$$

وعلى ذلك يمكننا تحديد الحركة تحديدا تاما باستخدام الإحداثي المعمم θ.

١-٦ السرعات المعممة : Generalized Velocities

السرعات المعممة هي المعدلات الزمنية للإحداثيات المعممة وعددها يساوي عدد الإحداثيات المعممة تساوي عدد درجات الحرية اى أن:

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \dot{q}_n$$

$$\text{or} \quad \dot{q}_\alpha = \frac{d\,q_\alpha}{d\,t} \;,\; \alpha = 1, 2, \ldots, n$$

١-٧ درجات الحرية للمجموعة: Degrees of freedom

هي عدد الازاحات الافتراضية (الازاحات التفاضلية) المستقلة والتي تتفق مع القيود المفروضة أو هي عدد الإحداثيات المعممة (إحداثيات مستقلة) اللازمة لتعيين موضع الجسيم.

فمثلاً : حركة جسيم في خط مستقيم درجة حرية واحدة $q_1 = x$ لتحديد موضعه.

ويلاحظ إذا وجدت قيود فإنها تقلل عدد درجات الحرية.

حركة جسيم في مستو له درجتان حرية:

$q_1 = x$ ، $q_2 = y$ أو $q_1 = r$ ، $q_2 = \theta$ ، ...

وفي الفراغ له ثلاث درجات حرية وهكذا ، فمنظومة تتكون من N جسيم يكون لها 3 N درجات حرية.

ودرجات الحرية قد تكون مسافات أو زوايا أو كميات أخرى لها علاقة بالمسافات والزوايا. فإذا كان هناك m قيد فإن عدد درجات الحرية = 3 N - m.

فمثلا عندما يتحرك جسيم بحرية في الفراغ فإنه يلزم ثلاث إحداثيات مثل (x,y,z) وذلك لتحديد موضعه وبذلك يكون عدد درجات الحرية هو ثلاث درجات. وعلى ذلك نجد أنه يمكن كتابة الإحداثيات الكرتيزية كدوال للإحداثيات المعممة على النحو التالي:

$$x = x(q_1, q_2, q_3),$$
$$y = y(q_1, q_2, q_3),$$
$$z = z(q_1, q_2, q_3).$$

وإذا كان الجسيم يتحرك على سطح أو في مستوى فتكون له درجتا حرية فقط ونجد أن:

$$x = x(q_1, q_2)$$
$$y = y(q_1, q_2)$$

وإذا كان الجسيم يتحرك على منحنى أو في خط مستقيم فتكون له درجة حرية واحدة ويكون:

$$x = x\ (q)$$

مثال٤:
مجموعة تتكون من N جسيما تتحرك بحرية في الفراغ ويلزمها 3N إحداثيات لتحديد موضعها وبذلك يكون عدد درجات الطاقة هو 3N.

الحل

الجسم الجاسئ الذي يستطيع الحركة بحرية في الفراغ له 6 درجات طلاقة أي 6 إحداثيات مطلوبة لتحديد الموضع.

مثال ٥:

حدد عدد درجات الطلاقة في كل من الحالات الآتية:

أ- جسيم يتحرك على منحني فراغي معين. ب- ٥ جسيمات تتحرك بحرية في مستوي.

جـ- ٥ جسيمات تتحرك بحرية في الفراغ. د- جسيمان موصلان بواسطة قضيب جاسئ يتحرك بحرية في مستوي.

الحل

أ) يمكن وصف المنحني بالمعادلات البارامترية $x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s)$ حيث s هو البارامتر. عندئذ يحدد موضع الجسيم على المنحني بواسطة إحداثي واحد معين. وبذلك توجد درجة طلاقة واحدة.

ب) كل جسيم يتطلب احداثيين لتحديد موضعه في المستوي وبذلك يلزم $5x2=10$ إحداثيات لتحدد مواضع جميع الجسيمات الـ 5 أي أن المجموعة لها 10 درجات طلاقة.

جـ) بما أن كل جسيم يلزمه 3 إحداثيات لتحدد موضعه فإن المجموعة يكون لها $3x5=15$ درجة طلاقة.

الطريقة الأولى:

يمكن التعبير عن إحداثيات جسمين بواسطة $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ أي بعدد 4 إحداثيات ولكن حيث أن المسافة بين هاتين النقطتين تكون ثابتة a (طول القضيب الجاسئ) فإن $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = a^2$ وينتج أنه يمكن التعبير عن درجة طلاقة معينة بدلالة أخري بناء على ذلك يوجد $4-1=3$ درجات طلاقة.

الطريقة الثانية:

تكون الحركة معروفة تماما إذا حددنا احداثيين لمركز الكتلة والزاوية التي يصنعها القضيب مع اتجاه معين. وبذلك يكون لدينا $2+1=3$ درجات طلاقة.

مثال ٦:

أوجد عدد درجات الطلاقة لجسم جاسئ: أ) يمكنه أن يتحرك بحرية في فراغ ثلاثي الأبعاد. ب) لديه نقطة مثبتة ولكنه يمكن أن يدور حولها في الفراغ.

الحـل

❖ **الطريقة الأولي:**

إذا كانت هناك ٣ نقط من الجسم الجاسئ مثبتة في الفراغ ولا تقع في مستوي واحد فإن الجسم الجاسئ يكون أيضا مثبتا في الفراغ. اعتبر أن إحداثيات هذه النقط على التوالي هي $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ أي أن عددها الكلي 9.

وحيث أن الجسم جاسئ فإنه يجب أن تكون لدينا هذه العلاقات.

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \text{ثابت}$$
$$(x_2 - x_3)^2 + (y_3 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = \text{ثابت}$$
$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = \text{ثابت}$$

أي أنه يمكن التعبير عن ثلاثة إحداثيات بدلالة الـ٦ الباقية . وبذلك يلزم ٦ إحداثيات مستقلة لكي توصف الحركة أي أن هناك ٦ درجات طلاقة.

❖ **الطريقة الثانية:**

أ) يلزم 3 إحداثيات لكي تثبت نقطة واحدة من الجسم الجاسئ المحور المار بهذه النقطة يكون مثبتا إذا حددنا نسبتين لجيوب تمام اتجاه هذا المحور. ويمكن عندئذ وصف الدوران حول المحور بواسطة إحداثي زاوي واحد ويكون العدد الكلي للإحداثيات المطلوبة أي عدد درجات الطلاقة هو 6=1+2+3.

ب) يمكن وصف الحركة تماما إذا علمنا إحداثيات نقطتين مثلا $(x_2, y_2, z_2), (x_1, y_1, z_1)$ حيث تؤخذ النقطة المثبتة عند نقطة أصل مجموعة الإحداثيات ولكن حيث أن الجسيم يكون جاسئ يجب أن يكون لدينا :

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \text{ثابت}$$
$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = \text{ثابت}$$
$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \text{ثابت}$$

ومنها يمكن إيجاد 3 إحداثيات بدلالة الـ3 الباقية. وبذلك يكون هناك 3 درجات طلاقة.

١-٩ الإزاحات الصغيرة في الإحداثيات:

لنفرض أن الإحداثيات المعممة q_α تتغير من القيم الابتدائية $(q_1, q_2, ...)$ إلى القيم المجاورة $(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, ...)$ فالتغيرات التي تقابلها في الإحداثيات الكرتيزية هي كما يلي:

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + ...$$
$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2 + ...$$

وهكذا المشتقات الجزئية $\frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial x}{\partial q_2}, \frac{\partial y}{\partial q_1}, \frac{\partial y}{\partial q_2}, ...$ نجد أنها دوال للإحداثيات q_s. وكمثال خاص لنفرض حركة جسيم في مستوى، ولنختار المحاور القطبية:

$$q_1 = r, \qquad q_2 = \theta$$

وعندئذ:

$$x = x(r,\theta) = r\cos\theta\,,$$
$$y = y(r,\theta) = r\sin\theta$$

وعلى ذلك نجد أن:

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial r}\delta r + \frac{\partial x}{\partial \theta}\delta\theta = \cos\theta\delta r - r\sin\theta\,\delta\theta$$
$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial r}\delta r + \frac{\partial y}{\partial \theta}\delta\theta = \sin\theta\delta r + r\cos\theta\,\delta\theta$$

والعلاقات السابقة واضح أنها تعطى التغييرات في x,y الناتجة عن تغييرات صغيرة في r,θ.

وكتعميم لذلك نفرض أن منظومة أو مجموعة تتكون من عدد كبير من الجسيمات، لنفرض أن هذه المجموعة لها n درجات حرية واحداثياتها المعممة لتكن $q_1, q_2, ..., q_n$ عندئذ فهي تتغير من الإحداثيات $q_1, q_2, ..., q_n$ إلى الإحداثيات المجاورة:

$(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, ..., q_n + \delta q_n)$ فيتحرك الجسيم من نقطة مثل (x_i, y_i, z_i) إلى النقطة المجاورة التي تبعد بمسافة صغيرة عنها وعلى ذلك تكون احداثياتها $(x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i)$ حيث:

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$\delta y_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$\delta z_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

وواضح أيضا أن المشتقات الجزئية هي دوال للإحداثيات q_α وسوف نستخدم الاصطلاح الذي يلزم الرمز ν ليشير إلى المحاور الكرتيزية والحرف α ليشير إلى الإحداثيات المعممة.

وعموما يكون:

$$\delta \vec{r}_\nu = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha$$

١٠-١ القوى المعممة: Generalized Forces

إذا وقع جسيم تحت تأثير إزاحة $\delta \vec{r}$ تحت تأثير قوة $\vec{F}$ فإننا نعلم أن الشغل δw المبذول (المنجز) من القوة عندئذ يكون:

$$\delta w = \vec{F}.\delta \vec{r} = F_x\, \delta_x + F_y\, \delta_y + F_z\, \delta_z$$

حيث الشغل دالة في الإحداثيات المعممة أي أن:

$$\delta w = \delta w(q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n)$$

والتي يمكن أن تكتب في الصورة المختصرة التالية:

$$\delta w = \sum_{\nu} F_\nu\, \delta r_\nu \qquad (1)$$

والعلاقة السابقة تصح كذلك لمجموعة متكونة من عدد كبير من الجسيمات فلجسيم واحد تأخذ ν القيم من واحد إلى ثلاثة وتمتد ν إلى N من الجسيمات من واحد إلى 3N.

لنعبر الآن عن الزيادة δr_ν بدلالة المحاور المعممة فنجد أن:

$$\delta w = \sum_{\nu}^{3N} \left(F_\nu \sum_{\alpha}^{n} \frac{\partial r_\nu}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \right)$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة:

$$\delta w = \sum_{\alpha}^{n}\left(\sum_{v}^{3N} F_v \frac{\partial x_v}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha$$

والتي يمكن وضعها على الصورة التالية:

$$\delta w = \sum_{\alpha} Q_\alpha \,\delta q_\alpha \qquad (2)$$

حيث:

$$Q_\alpha = \sum_{i} F_v \frac{\partial r_v}{\partial q_\alpha} \qquad (3)$$

الكمية Q_α المعرفة بالمعادلة (٣) تسمى بالقوة المعممة المرافقة للإحداثي q_α

١-١ طاقة الحركة T وكمية الحركة المعممة P

بفرض أن كتلة الجسيم رقم v هي m_v والتي تؤثر عليه قوة $\vec{F}_v$ فإذا كان متجه موضع الجسيم عند أي لحظة زمنية t هي :

$$\vec{r}_v = \vec{r}_v\left(q_1, \ldots, q_\alpha, t\right)$$

وحيث أن طاقة الحركة T تعطى من $T = \frac{1}{2} m \dot{r}_v^2$ (للجسيم v) فإن طاقة الحركة للمنظومة المكونة من N جسيم والتي له الجسيم رقم v فيها)

$$T = \frac{1}{2}\sum_{v=1}^{N} m_v \dot{r}_v^2$$

مما سبق

$$\dot{\vec{r}}_v = \sum \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$$

وهذه المعادلة تعطي سرعة الجسيم v عند اللحظة t

$$2T = m_v\left(\dot{\vec{r}}_v \cdot \dot{\vec{r}}_v\right)$$

$$\therefore 2T = m\left[\sum_{\alpha}\sum_{\beta}\left(\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\beta}\right)\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + 2\sum_{\alpha}\left(\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t}\right)\dot{q}_\alpha + \left(\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t}\right)^2\right]$$

وإذا كانت $\vec{r}_v$ لا تعتمد على t صراحة فإن :

$$2T = \sum \sum A_{\alpha\beta}\, \dot{q}_\alpha\, \dot{q}_\beta$$

حيث

$$A_{\alpha\beta} = m_v \left(\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\beta} \right)$$

وكمية الحركة تعطى من العلاقة :

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

والتي تسمى كمية الحركة المعممة المرافقة للإحداثي q_α والتي يمكن إيجادها كذلك من طاقة الحركة

$$T = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{N} m_v \dot{\vec{r}}_v^{\,2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \sum_{v=1}^{N} m_v\, \dot{\vec{r}}_v\, \frac{\partial \dot{\vec{r}}_v}{\partial q_\alpha}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum m_v\, \dot{\vec{r}}_v\ {}_v \frac{\partial \dot{\vec{r}}_v}{\partial q_\alpha} = \sum m_v\, \dot{\vec{r}}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}$$

يجب تذكر الآتي :

معادلات الحركة من قانون نيوتن الثاني: $m_v \ddot{\vec{r}}_v = \vec{F}_v$

طاقة الحركة في الإحداثيات الكارتيزية: $T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

طاقة الحركة في الإحداثيات الأسطوانية: $T = \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\phi})^2 + \dot{z}^2)$

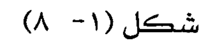
طاقة الحركة في الإحداثيات الكروية: $T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\sin\theta\dot{\phi})^2)$

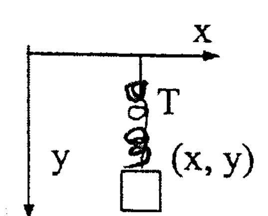
مثال ٧:

جسيم كتلته m مربوط في زنبرك رأسي ثابت أوجد القوى المعممة.

الحـل

القوى المؤثرة على الجسيم هي الشد T إلى أعلى، والوزن mg رأسياً لأسفل.


شكل (١- ٨)



$$\because \vec{F}_1 = -T\vec{j} \quad , \vec{F}_2 = m g \,\vec{j}$$

متجهات مواضع القوى هي:

$$\vec{r}_{1,2} = x\,\vec{i} + y\vec{j}$$

باستخدام القوى المعممة والشغل المبذول:

$$Q_v = \frac{\delta W}{\partial q_v} \quad \text{where} \quad \delta W = \vec{F} . \delta\, \vec{r}$$

$$\therefore \delta W = (-T + mg)\,\vec{j} . (\delta\, x\vec{i} + \delta\, y\vec{j}\,) = (-T + mg)\,\delta\, y$$

$$Q_y = -T + mg \quad , \quad Q_x = 0$$

ويمكن كذلك إيجاد نفس النتيجة وذلك بالتعويض في القانون:

$$Q_\alpha = \sum F_v \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}$$

والإحداثي الوحيد المعمم هو y لذلك توجد قوى معممة واحدة.

$$Q_\alpha = F_v . \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial y} = (-T + m\,g)\frac{\delta\, y}{\delta\, y} = -T + m\,g$$

مثال ٨:

تتحرك خرزة كتلتها m على سلك على هيئة قطع مكافئ معادلته $z = 0$ ، $y = 16\,x^2$. احسب القوى المعممة.

الحـل

من تعريف القوى المعممة: $Q_v = \sum F_\alpha \dfrac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_v}$ وكذلك نلاحظ أن :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{i} + 16x^2\vec{j}$$

أي لا يوجد إلا إحداثي معمم واحد لذلك توجد قوى معممة واحدة هي

$$Q_x = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \left(-m g \vec{j}\right) \cdot \left(\vec{i} + 32 x \vec{j}\right) = -32mgx$$

حل آخر : من الشغل الافتراضي

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}$$
$$= \left(-m g \vec{j}\right) \cdot \left(\delta x \vec{i} + 32 x \delta x \vec{j}\right) = 32 m g x \delta x$$
$$Q_x = \frac{\delta W}{\delta x} = -32 m g x , \qquad Q_y = Q_z = 0$$

مثال ٩:
جسيم كتلته m يتحرك إلى أسفل مستوى مائل يميل على الأفقي بزاوية $\alpha = 30^o$ إذا علم أن معامل الإجهاد $\mu = 0.2$ أوجد القوى المعممة للجسيم.

الحل

شكل (١- ٩)

نفرض أن الجسيم في وضع عام على بعد x من o ومحور x منطبق مع خط أكبر ميل والمحور y عمودي عليه. لاحظ أن هنا إحداثي معمم واحد هو x

$$\vec{F} = \left(R \cos \alpha - \mu R\right) \vec{i} + \left(R - m g \sin \alpha\right) \vec{j}$$
$$\vec{r} = x \vec{i} \quad , \quad \delta \vec{r} = \delta x \vec{i}$$

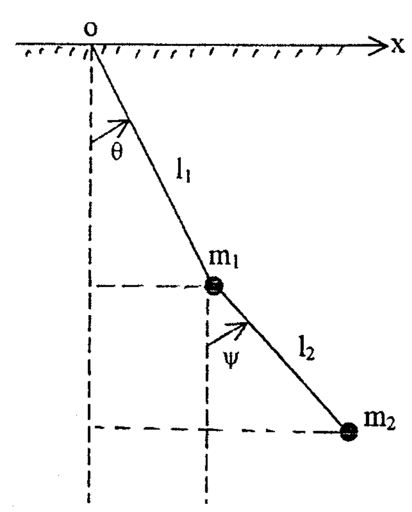
$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = \left(R \cos \alpha - \mu R\right) \delta x$$
$$\therefore Q_x = R \cos \alpha - \mu R$$

مثال ١٠:
يتكون البندول المزدوج من كتلتان m_1, m_2 متصلتان ببعضهما بقضيب خفيف طوله ℓ_2 وتتصل m_1 بقضيب آخر طوله ℓ_1 ويمكن للطرف الآخر لهذا القضيب الحركة بحرية حول نقطة ثابتة o بمفصل أملس وتتحرك المجموعة بحرية كاملة في مستوى رأسي. أوجد قوى العموم لهذه المنظومة.

الحل

نختار النقطة الثابتة o كنقطة أصل، والمحور الأفقي ox والمحور الرأسي لأسفل هو oy حيث يكون المستوى oxy هو المستوى الذي يتحرك فيه البندول المزدوج. يلاحظ أن للمجموعة أربعة معادلتي قيود هندسية وبذلك يوجد احداثيان عموم اثنين فقط ويمكن اختيارهما الزاويتين للقضيبين

شكل (١- ١١)



مع الرأسي، أي أنهما إحداثيات كرتيزية، بينما توجد:

$$q_1 = \phi \quad , \quad q_2 = \psi \qquad (1)$$

والقوى المؤثرة على الكتلتين هما:

$$\vec{F}_1 = m_1 g \vec{j}, \quad \vec{F}_2 = m_2 g \vec{j} \qquad (2)$$

ويجب ملاحظة أن هاتين القوتين ليستا مصاحبتين لإحداثيات العموم q_1, q_2 ولكنهما مصاحبتين لمتجهى الموضع $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ حيث:

$$\vec{r}_1 = \ell_1 \sin\phi \,\vec{i} + \ell_1 \cos\phi \,\vec{j}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \ell_2 \sin\psi \,\vec{i} + \ell_2 \cos\psi \,\vec{j}$$

$$\vec{r}_2 = (\ell_1 \sin\phi + \ell_2 \sin\psi)\,\vec{i} + (\ell_1 \cos\phi + \ell_2 \cos\psi)\,\vec{j}$$

والآن يمكن من المعادلة السابقة إيجاد قوى العموم بطريقتين كالتالي:

❖ الطريقة الأولى:

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{2} \vec{F}_v \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \qquad (4)$$

ومنها نجد أن:

$$Q_\phi = \sum_{i=1}^{2} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \phi} = \vec{F}_1 \cdot \frac{\partial r_1}{\partial \phi} + \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \phi} \qquad (5)$$

$$= m_1 g \vec{j}.(+\ell_1 \cos\phi \, \vec{i} - \ell_1 \sin\phi \, \vec{j})$$

$$+ m_2 g \vec{j}.[+\ell_1 \cos\phi \, \vec{i} - \ell_1 \sin\phi \, \vec{j}]$$

$$= -(m_1 + m_2) g \ell_1 \sin\phi$$

$$Q_\psi = \vec{F}_1 . \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \psi} + \vec{F}_2 . \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \psi}$$

$$= m_1 g \vec{j}.(o) + m_2 g \vec{j}.(+\ell_2 \cos\psi \, \vec{i} - \ell_2 \sin\psi \, \vec{j})$$

$$= -m_2 g \ell_2 \sin\psi$$

❖ الطريقة الثانية:

نظرا لأن البندول المزدوج يمثل مجموعة محافظة (لأن $\text{curl}\,\vec{F} = \vec{o}$) وعلى ذلك يمكن تعيين القوى المعممة Q_ϕ, Q_ψ من دالة جهد V والتي إذا قيست من المستوى الأفقي الذي يمر بالنقطة الثابتة o نجد أنه يمكن كتابتها على الصورة:

$$V = -m_1 g \, y_1 - m_2 g \, y_2$$

$$= -m_1 g (\ell_1 \cos\phi) - m_2 g (\ell_1 \cos\phi + \ell_2 \cos\psi)$$

$$= -(m_1 + m_2) g \ell_1 \cos\phi - m_2 g \ell_2 \cos\psi$$

$$Q_\phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi} = -(m_1 + m_2) g \ell_1 \sin\phi$$

$$Q_\psi = -\frac{\partial V}{\partial \psi} = -m_2 g \ell_2 \sin\psi$$

وكذلك يمكن في هذه الطريقة إيجاد القوى الكرتيزية كالتالي:

$$\vec{F}_1 = -\vec{\nabla}_1 V = m_1 g \vec{j}, \quad \vec{F}_2 = -\vec{\nabla}_2 V = m_2 g \vec{j}$$

١-١٢ تقسيم المجموعات الميكانيكية:

يمكن تقسيم المجموعات الميكانيكية على أنها: أ- مجموعات محافظة أو غير محافظة ب- مجموعات زمنية أو غير زمنية جـ- مجموعات تامة التقييد أو غير تامة التقييد.

أولا: المجموعات المحافظة والمجموعات الغير محافظة:

إذا كانت جميع القوى المؤثرة على مجموعة جسيمات يمكن اشتقاقها من دالة جهد (أو طاقة جهد) فإن المجموعة تسمى مجموعة محافظة وهذا يعبر عنه رياضيا كالتالي:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\text{grad } V \qquad (1)$$

وفيما عدا ذلك تكون المجموعة غير محافظة.

وبأخذ دوران الطرفين في المعادلة (١) نجد أن:

$$\text{curl } \vec{F} = -\text{curl grad } V \Rightarrow \quad \text{curl } \vec{F} = \vec{0} \qquad (2)$$

أي أن إذا كانت المجموعة محافظة فيكون دوران القوة في هذه الحالة يساوى صفرا إما إذا كان دوران القوة لا يساوى صفرا فإن المجموعة تكون غير محافظة.

وهناك تعريف آخر للأنظمة المحافظة وهو:

"مجموع طاقتي الحركة وطاقة الجهد (طاقة الموضع أو الطاقة الكامنة) لأي نظام محافظ يساوى مقدار ثابت لا يعتمد على الزمن.

ومعنى هذا أن النظام المحافظ هو نظام معزول لا يتبادل الطاقة مع المحيط، أي لا يتأثر بالقوى الخارجية ولا يعانى قوى مبددة (مشتتة) كالاحتكاك.

ومن أجل توضيح أن تعريفي النظام المحافظ متكافآن، نأخذ جسيم واحد يتحرك على خط مستقيم وليكن محور x. وعلى ذلك القانون الثاني لنيوتن لهذه الحالة كالآتي:

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (3)$$

ولكن من العلاقة (١) نجد أنها تصبح في هذه الحالة على الصورة:

$$F_x = -\frac{dV_{(x)}}{dx} \quad \text{(حيث هنا يكون} \quad \nabla = \frac{d}{dx}\,i) \qquad (4)$$

وبالتعويض من (٤) في (٣) نحصل على:

$$-\frac{dV_{(x)}}{dx}=m\frac{d^2x}{dt^2}=m\frac{dv}{dt} \qquad (5)$$

بالضرب في dx ثم إجراء التكامل نحصل على:

$$-\int d\,V_{(x)}=m\int dv\frac{dx}{dt}$$

$$-\int d\,V_{(x)}=m\int vdv$$

$$-V_{(x)}+C=\frac{1}{2}mv^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}mv^2+V(x)=C$$

حيث C هو ثابت التكامل، وهكذا يتضح أن مجموع طاقتي الحركة والجهد للجسيم يساوى مقدارا ثابتا. وعندئذ يكون تعريفي النظام المحافظ متكافئين.

ويلاحظ أن مجموع طاقتي الحركة والجهد يسمى أحيانا بالطاقة الكلية وإذا رمزنا لطاقة الحركة بالرمز T ، طاقة الجهد بالرمز V والطاقة الكلية بالرمز E يكون: $E=T+V=\text{const.}$ وأحيانا يسمى هذا المبدأ "بمبدأ ثبوت الطاقة".

مثال ١١:

أثبت أن: $\vec{F}=(2xy+z^3)\,\vec{i}+x^2\,\vec{j}+3xz^2\,\vec{k}$ هو مجال قوة محافظ. ثم أوجد دالة الجهد . ثم أوجد الشغل المبذول في إزاحة جسيم في هذا المجال من النقطة (1, -2,1) إلى النقطة (3, 1, 4).

الحل:

أولا: الشرط الضروري والكافي لكي تكون القوة محافظة هو: $\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\vec{o}$ أي أن:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xy+z^3 & x^2 & 3xz^2\end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=0\vec{i}-(3z^2-3z^2)\vec{j}=(2x-2x)\vec{k}=\vec{0}$$

أي أن $\vec{F}$ هي مجال قوة محافظ.

❖ثانيا: لتعيين دالة الجهد نتبع الآتي: $\vec{F}=-\vec{\nabla}\,V_{(x,y,z)}$

$$\vec{F}=-\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}-\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}-\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \qquad (1)$$

ولكن معلوم أن:

$$\vec{F}=(2xy+z^3)\,\vec{i}+x^2\vec{j}+3xz^2\,k \qquad (2)$$

من (٢) و (١) نحصل على:

$$-\frac{\partial V}{\partial x}=2xy+z^3,\quad -\frac{\partial V}{\partial y}=x^2,\quad -\frac{\partial V}{\partial z}=3xz^2 \qquad (3)$$

بإجراء عمليات التكامل نجد أن:

$$-V=x^2y+xz^3+f(y,z) \qquad (4)$$

$$-V=x^2y+f(z,x) \qquad (5)$$

$$-V=xz^3+f(x,y) \qquad (6)$$

كذلك نختار:

$$f(x,y)=x^2y+c,\quad f(z,x)=xz^3+c,\quad f(y,z)=c$$

فنجد أن: $V=-(x^2y+xz^3)+c$

وعندما نجعل الثابت يتلاشى أو نعتبره يساوى صفرا طبقا لشروط ابتدائية معينة فإن دالة الجهد تصبح: $V(x,y,z)=-(x^2y+xz^3)$

❖ثالثا: لتعيين الشغل لإزاحة الجسيم في هذا المجال من النقطة (1,-2,1) إلى النقطة (3,1,4).

$$W=-\int_c dV=-\left[-(x^2y+xz^3)\right]_{(1,-2,1)}^{(3,1,4)}=202$$

مثال ١٢:

أوجد الثوابت a, b, c التي تجعل مجال القوة الآتية محافظ:

$$\vec{F}=(x+2y+az)\,\vec{i}+(bx-3y-z)\,\vec{j}+(4x+cy+2z)\,\vec{k}$$

ثم أوجد دالة الجهد المصاحبة لمجال هذه القوة.

الحل

أولا: شرط أن يكون مجال القوة محافظ هو:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x+2y+az) & (bx-3y-z) & (4x+cy+2z) \end{vmatrix}=\vec{0}$$

$$c+1=0,\quad a-4=0,\quad b-2=0$$

إذن مجال القوة المحافظ يصبح:

$$\vec{F}=(x+2y+4z)\,\vec{i}+(2x-3y-z)\,\vec{j}+(4x-y+2z)\,\vec{k} \qquad (1)$$

ثانيا: لتعيين الجهد أو دالة الجهد نتبع الخطوات التالية:

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}V(x,y,z)=-\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}-\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}-\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \qquad (2)$$

من (١)، (٢) نجد أن:

$$-\frac{\partial V}{\partial x}=x+2y+4z \Rightarrow -V=\frac{1}{2}x^2+2xy+4xz+f(y,z)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial y}=2x-3y-z \Rightarrow -V=2xy-\frac{3}{2}y^2-yz+f(x,z)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial z}=4xy+2z \Rightarrow -V=4xz-Yz+z^2+f(x,y)$$

ويمكن اختيار الدوال المجهولة على الصورة:

$$f(y,z)=-\frac{3}{2}y^2-yz+z^2+c,\quad f(x,z)=4xz+\frac{1}{2}x^2+z^2+c$$

$$f(x,y)=\frac{1}{2}x^2+2xy-\frac{3}{2}y^2+c$$

إذن دالة الجهد المطلوبة تصبح:

$$-V=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}y^2+z^3+2xy-yz+4xz+c.$$

مثال ١٣:

أثبت أنه في المحاور القطبية (r,θ) يكون: $\vec{\nabla}V=\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta$

حيث $\vec{e}_r,\vec{e}_\theta$ متجهى وحدة في اتجاه الموضع $\vec{r}$ وفى الاتجاه العمودي عليه.

الحل

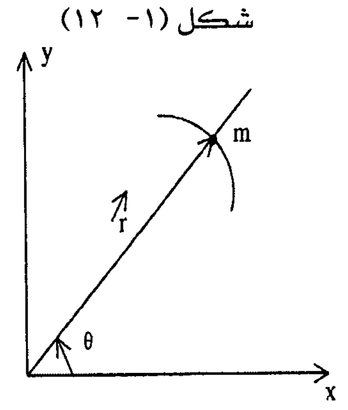
لنفرض أن:

$$\vec{\nabla}V=G\,\vec{e}_r+H\,\vec{e}_\theta \qquad (1)$$

والمطلوب هو تعيين G, H.

علاقة التحويل بين الإحداثيات والقطبية

هي:
$$y = r\sin\theta$$



شكل (١- ١٢)

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta$$
$$= \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$$

وبالمثل

$$x = r\cos\theta$$
$$\therefore\ dx = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta \qquad (2)$$
$$= \cos\theta\, dr + r\sin\theta\, d\theta$$

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} \qquad (3)$$

ومن شكل (١-١٢) واضح أن:

$$\vec{i} = \cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta,\ \vec{j} = \sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta \qquad (4)$$

من (٢)، (٤)، (٣) نحصل على:

$$d\vec{r} = (\cos\theta\, dr - r\sin\theta d\theta)(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$$
$$+ (\sin\theta\, dr + v\cos\theta d\theta)(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta)$$

$$d\vec{r} = \cos^2\theta\vec{e}_r dr + r\sin^2\theta\, d\theta\vec{e}_\partial + \sin^2\theta\, dr\,\vec{e}_r + r\cos^2\partial\,\theta\vec{e}_\theta$$
$$(5) \qquad - r\sin\theta\cos\theta\, d\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\cos\theta\, dr\vec{e}_\theta$$
$$+ r\sin\theta\cos\theta\, d\theta\vec{e}_r + \sin\theta\cos\theta\, dr\,\vec{e}_\theta$$

$$d\vec{r} = dr\,\vec{e}_r + r\, d\theta\vec{e}_\theta$$

ولكن:

$$\vec{\nabla} V . d\vec{r} = d\,\vec{V} = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial \theta}d\theta \qquad (6)$$

بالتعويض من (١)، (٥) في (٦) نجد أن:

$$(G\,\vec{e}_r + H\,\vec{e}_\theta).(dr\vec{e}_r + r\,d\theta\vec{e}_\theta) = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial \theta}d\theta$$

$$G\,dr + H\,rd\theta = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial \theta}d\theta$$

وفيها نجد أن:

$$Q_k = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

وبذلك تصبح المعادلة (١) على الصورة:

$$\therefore \quad \vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta$$

مثال ١٤:

١) قسم كلا من المجموعات الآتية على حسب ما إذا كانت: (i) زمنية أو غير زمنية. (ii) تامة التقييد أو غير تامة التقييد. (iii) محافظة أو غير محافظة.

أ- كرة تتدحرج إلى اسفل من قمة كرة أخرى مثبتة. ب- اسطوانة تتدحرج دون انزلاق إلى أسفل مستوي مائل خشن زاويته α. جـ- جسيم ينزلق على السطح الداخلي لجسم مكافئ دوراني قمته إلى أسفل ومحوره رأسي ومعامل احتكاكه μ .

د- جسيم يتحرك على سلك لا احتكاكي طويل جدا ويدور حول محور أفقي بسرعة زاوية ثابتة.

الحل

أ) في حالة كرة تتدحرج إلى اسفل من قمة كرة أخرى مثبتة تعتبر هذه الحال مجموعة غير زمنية ،وذلك لأن المعادلات لا تتضمن الزمن t بصراحة· وهي مجموعة غير تامة التقييد وذلك لأن الكرة المتحرجة تترك الكرة المثبتة عند نقطة ما. وهي مجموعة محافظة لأن قوة الجاذبية التي تؤثر يمكن اشتقاقها من الجهد.

ب) في حالة اسطوانة تتدحرج دون انزلاق إلى أسفل مستوي مائل خشن زاويته α تعتبر هذه الحالة مجموعة غير زمنية وذلك لأن المعادلات لا تتضمن الزمن t

بصراحة· وهي مجموعة تامة التقييد لأن معادلة التقييد هي معادلة خط أو مستوي، وهي مجموعة محافظة لأن قوة الجاذبية التي تؤثر يمكن اشتقاقها من الجهد·

جـ) وبالمثل يمكن بسهولة تحديد أنه في حالة جسيم ينزلق على السطح الداخلي لجسم مكافئ دوراني قمته إلى أسفل ومحوره رأسي ومعامل احتكاكه μ ، أن المجموعة غير زمنية، تامة التقييد، غير محافظة (لأن قوة الاحتكاك لا يمكن اشتقاقها من الجهد).

د) (أيضا في حالة جسيم يتحرك على سلك لا احتكاكي طويل جدا ويدور حول محور أفقي بسرعة زاوية ثابتة، فأن المجموعة تكون زمنية)التقييد يتضمن الزمن t بصراحة،(تامة التقييد)معادلة التقييد هي معادلة الخط وتتضمن الزمن t بصراحة، وهي محافظة.

تمارين

١- ما هي الإحداثيات المعممة التي تلزم لتحديد حركة كل مما يأتي تحديدا كاملا:

أ)خرزة مقيدة الحركة على سلك دائري. ب) جسيم مقيد الحركة على كرة.

ج)قرص دائري يتدحرج على مستوي أفقي. د) بندول مركب.

هـ) مخروط يتدحرج على مستوي أفقي. و) آلة آتوود.

٢- أكتب معادلات التحويل لحركة بندول ثلاثي بدلالة مجموعة إحداثيات معممة مناسبة.

٣- يتحرك جسيم على السطح العلوي لجسيم مكافئ دوراني أملس معادلته هي:

$$x^2 + y^2 = cz$$

أكتب معادلات التحويل لحركة الجسيم بدلالة مجموعة مناسبة من الإحداثيات المعممة.

٤- أكتب معادلات التحويل لحركة جسيم مقيد الحركة على كرة.

٥- قسم كلا مما يأتي على حسب ما إذا كان:

(i مجموعة زمنية أو غير زمنية. (ii مجموعة تامة التقييد أو غير تامة التقييد.

(iii مجموعة محافظة أو غير محافظة.

أ- اسطوانة أفقية نصف قطرها a تتدحرج بداخل اسطوانة أفقية جوفاء كاملة الخشونة نصف قطرها $a<b$.

ب- اسطوانة تتدحرج (ويمكن أن تنزلق) إلى أسفل على مستوي مائل زاويته a.

جـ- كرة تتدحرج إلى أسفل على كرة أخري تتدحرج بدورها على مستوي أفقي بسرعة منتظمة.

د- جسيم مقيد الحركة في خط تحت تأثير قوة تتناسب عكسيا مع مربع البعد عن نقطة مثبتة وقوة إخماد تتناسب مع مربع السرعة اللحظية.

٦- أثبت أنه إذا كانت معادلات التحويل تعطي من $r_v = r_v(q_1, q_2, ...q_n)$ أي أنها لا تتضمن الزمن t صراحة فإن طاقة الحركة يمكن كتابتها على الصورة:

$$T = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$$

حيث $a_{\alpha\beta}$ دوال في q_α. ثم ناقش الحالة السابقة ما إذا كانت معادلات التحويل تعتمد صراحة على الزمن t.

٧- إذا كان $F(\lambda x, \lambda y, z\lambda) = \lambda n F(x, y, z)$ حيث λ بارامتر فإن F تسمي "دالة متجانسة من الرتبة n" حدد أيا من الدوال الآتية تكون متجانسة وبين الرتبة في كل حالة.

(أ) $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz$　(ب) $3x - 2y + 4z$

(جـ) $xyz + 2xy + 2xz + 2yz$　(د) $\dfrac{(x + y + z)}{x}$

(هـ) $x^3 \tan^{-1}(\dfrac{y}{x})$　(و) $4\sin xy$　(ز) $\dfrac{(x + y + z)}{(x^2 + y^2 + z^2)}$

٨- إذا كانت F(x, y, z) دالة متجانسة من الرتبة n انظر المسألة السابقة. وأثبت أن:

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = nF$$

هذه تسمي "نظرية أويلر للدوال المتجانسة" ثم عمم النتيجة التي حصلت عليها٠

٩- أثبت أنه إذا كانت معادلات التحويل لا تعتمد صراحة على الزمن t وكانت T هي طاقة الحركة فإن:

$$\dot{q}_1\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_2\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} + ... + \dot{q}_n\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} = 2T$$

هل يمكنك إثبات هذا مباشرة بدون استخدام نظرية أويلر للدوال المتجانسة٠

١٠) أثبت أن مجال القوة $\vec{F}$ المعرفة كالتالي:

$$\vec{F} = (y^2 z^3 - 6xz^2)\,\vec{i} + 2\,x\,y\,z^3\,\vec{j} + (3\,x\,y^2\,z^2 - 6\,x^2\,z)\,\vec{k}$$

هو مجال قوة محافظ. ثم أوجد دالة الجهد القياسية (أو طاقة الجهد).

١١) أثبت أن مجال القوة $\vec{F}$ المعرفة كالتالي: $\vec{F} = -m\,\omega^2 (x\,\vec{i} + y\,\vec{j})$ هو مجال محافظ. ثم أوجد طاقة الجهد.

١٢) أثبت أن مجال القوة $\vec{F}$ المعرفة كالتالي: $\vec{F} = x^2\,y\,z\,\vec{i} - x\,y\,z^2\,\vec{k}$ هو مجال غير محافظ.

١٣) أثبت أن مجال القوة $\vec{F}$ المعرفة كالتالي: $\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$ هو مجال محافظ. ثم أوجد طاقة الجهد.

١٤) جسيم كتلته 3 وحدات، ويتحرك في المستوى xy تحت تأثير مجال قوة له الجهد هو: $V = 12\,x(3y - 4x)$ ، أوجد العجلة التي يتحرك بها هذا الجسيم.



معادلات لاجرانج

Lagrange's Equations

* معادلات لاجرانج للمجموعات تامة التقييد
* تطبيقات على استخدام معادلات لاجرانج
* معادلات لاجرانج للمجموعات غير تامة التقييد
* معادلات لاجرانج والقوى الدفعية

الفصل الثاني
معادلات لاجرانج
Lagrange's Equations

أولا: معادلات لاجرانج للمجموعات تامة التقييد
Lagrange's Equations for Holonomic systems

٢-١ مقدمة

معادلات لاجرانج يمكن اشتقاقها بعدة طرق ومنها التي سوف نبدأ بالقانون الثاني لنيوتن والتي سنستخدمها في هذا الفصل ولكن قبل إيجاد معادلات لاجرانج سنعطي بعض العلاقات الرياضية التي نحتاجها وكذلك مراجعة الصور الخاصة بالقوى المعممة والشغل المبذول بالقوة المؤثرة وطاقة الحركة وكمية الحركة ... الخ.

العلاقة الأولى :

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_v}{\partial \dot{q}_\alpha}=\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}$$

حيث $v=1,2,\cdots,N$ (رقم الجسيم)، $\alpha=1,2,...,n$ (رقم الإحداثي).

البرهان :

$$\because\ \vec{r}_v=\vec{r}(q_1,q_2,...,q_n,t) \qquad (1)$$

$$\therefore\ \dot{\vec{r}}_v=\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} \qquad (2)$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى الإحداثي المعمم للسرعة $\dot{q}_\alpha$ فكل الحدود تتلاشى فيما عدا الحد رقم α ويكون

$$\frac{\partial\ \dot{\vec{r}}_v}{\partial\ \dot{q}_\alpha}=\frac{\partial\ \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \qquad (3)$$

وهو المطلوب إثباته.

العلاقة الثانية :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}\right)=\frac{\partial \dot{\vec{r}}_v}{\partial q_\alpha}$$

البرهان: بالتفاضل جزئياً بالنسبة إلى q_α المعادلة $\dot{\vec{r}}_v$ نحصل على:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_v}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 \vec{r}_v}{\partial q_\alpha\, q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_v}{\partial q_\alpha\, q_2}\dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \vec{r}_v}{\partial q_\alpha\, q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial^2 \vec{r}_v}{\partial q_\alpha\, \partial t}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_v}{\partial q_\alpha\, q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial^2 \vec{r}_v}{\partial q_\alpha\, \partial t} \qquad (4)$$

وحيث أن $\vec{r}_v$ دالة في (q_i, t) فإن $\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}$ ستكون دوال في $q_1, q_2, \dots, q_n, t$ أي أن:

$$\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \vec{r}_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t)}{\partial q_\alpha}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial^2 \vec{r}_v}{\partial q_1\, \partial q_\alpha}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_v}{\partial q_2\, \partial q_\alpha}\dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \vec{r}_v}{\partial q_n\, \partial q_\alpha}\dot{q}_n \qquad (5)$$

وبمقارنة الصيغتين السابقتين نحصل على :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_v}{\partial q_\alpha} \qquad (6)$$

أي أن :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{d}{dt}\right)$$

أي يمكن تبديل موضعي التفاضل الكلي والجزئي.

٢-٢ الشغل المبذول بالقوى المؤثرة والقوى المعممة:

بفرض أن القوة المؤثرة على الجسيم رقم ٧ هـي $\vec{F}_v$ وأن مجموعـة الجسيمات ازيحت ازاحات تفاضلية(صغيرة) تجعل الزمن ثابت أي أثنـاء هـذه الإزاحـات ونتيجـة لهـذه الإزاحات فان الجسيم رقم ٧ والذي متجه موضعه $\vec{r}_v$ سيزاح الإزاحة $d\vec{r}_v$ والـتي تتعين من

$$d\vec{r}_v = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}\, d q_\alpha \qquad (7)$$

ويصبح الشغل المبذول بواسطة القوة في هذه الإزاحات هو

$$dW = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu . d\vec{r}_\nu = \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu . \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \right\} d\, q_\alpha$$

$$\therefore dW = \sum_{\alpha=1}^{n} Q_\alpha \, d\, q_\alpha \qquad (8)$$

حيث $Q_\alpha = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$ القوى المعممة المرافقة للإحداثي المعمم q_α وتعرف بأنها تركيبة من القوى المؤثرة وتبذل شغلا في ازاحات المواضع dq_α يساوى الشغل المبذول بالقوة الحقيقية في ازاحات مواضع الجسيمات $d\vec{r}_\alpha$.

بما أن الشغل المبذول دالة في الإحداثيات المعممة أي $W = W(q_1, q_2, ..., q_n)$ فيكون:

$$dW = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} dq_\alpha$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} Q_\alpha dq_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} dq_\alpha$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (Q_\alpha - \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}) dq_\alpha = 0$$

وحيث أن dq_α مستقلة عن بعضها فيكون:

$$Q_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} \qquad (9)$$

٢-٣ كمية الحركة المعممة:

هي تغير طاقة الحركة بالنسبة للسرعات المعممة

$$P_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \qquad (10)$$

٢-٤ معادلة لاجرانج:

إذا فرضنا مجموعة ديناميكية هولونومية مكونة من جسيم كتلته m_ν وله الإحداثيات المعممة q_α وتؤثر عليه قوة $\vec{F}_\nu$ فإذا كان $\vec{r}_\nu$ هو متجه موضع الجسيم عند اللحظة t فإنه من قانون نيوتن الثاني تكون معادلة الحركة

$$m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu = \vec{F}_\nu$$

بضرب طرفي المعادلة قياسياً في $\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$ نحصل على :

$$m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\alpha} = \vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \tag{11}$$

ولاحظ أن $Q_\alpha = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$

$$\because \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right) = \ddot{\vec{r}}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\alpha} + \dot{\vec{r}}_\nu \frac{d}{d}\left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right)$$

$$= \ddot{\vec{r}}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\alpha} + \dot{\vec{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}{\partial q_\alpha}$$

$$\therefore \ddot{\vec{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right) - \dot{\vec{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} \tag{12}$$

بالتعويض من (12) في (11) بعد الضرب في m_ν واستخدام المعادلة (10) يكون

$$\vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\left(m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right) - m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}{\partial q_\alpha}$$

وبالنسبة لمجموعة N من الجسيمات والتي كتلة الجسم رقم ν فيها m_ν يمكن وضع الصورة السابق كالآتي:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right) - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} \tag{13}$$

$$Q_\alpha = \frac{d}{dt}\left(m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right) - m_\nu \ \dot{\vec{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} \qquad (14)$$

وحيث أن $\dot{\vec{r}}_\nu$ هو متجه سرعة الجسيم ومن ثم يمكن وضع الصورة السابقة للمعادلة (14) بدلالة طاقة الحركة T كالآتي

حيث أن:

$$T = \frac{1}{2} m_\nu \left(\dot{\vec{r}}_\nu \cdot \dot{\vec{r}}_\nu\right) \qquad (15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = m_\nu \ \dot{\vec{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad = m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \qquad (16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} \qquad (17)$$

بالتعويض من المعادلة (16)، (17) في المعادلة (14) نحصل على :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \qquad (18)$$

وهذه المعادلة تسمى معادلة لاجرانج للحركة للأنظمة الهولونومية وهي عبارة عن مجموعة معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية وعددها يساوي عدد الإحداثيات المعممة. ويجب التذكر دائماً أن لكل إحداثي معمم q_α ترافقه معادلة لاجرانج بينما لكل جسيم ترافقه معادلة نيوتن للحركة.

ويلاحظ أيضاً أن α في المعادلة السابقة يمكن أن تكون 3 ,2 ,1 أو 2 ,1 أو 1 حسب عدد الإحداثيات المعممة للجسيم الواحد.

إذا كان لدينا N من الجسيمات فإن طاقة الحركة ستكون

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2} \quad = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu \cdot \dot{\vec{r}}_\nu \qquad (19)$$

بتفاضل (19) بالنسبة إلى $\dot{q}_\alpha$ مرة وأخرى بالنسبة إلى q_α

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} \tag{20}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}=\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \underline{r}_\nu}{\partial \dot{q}_\alpha} \tag{21}$$

وأن

$$Q_\alpha=\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \tag{22}$$

في حالة ما إذا كانت المجموعة الديناميكية محافظة والتي فيها يمكن اشتقاق القوى المؤثرة على المجموعة من دالة جهد قياسية V ويحث أن V دالة في الإحداثيات المعممة وقد يدخل الزمن حسب ما إذا كان القيد مستقر أو غير مستقر زمنياً مع ملاحظة أنها لا تحتوي على السرعات المعممة، ومن ثم

$$V=V(q_\alpha , t) \qquad \text{or} \qquad V=V(q_\alpha) \tag{23}$$

نعلم أن :

$$Q_\alpha=-\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \tag{24}$$

وأن

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\alpha}=0$$

بالتعويض من المعادلة (24) في (18) نحصل على :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=-\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right]=\frac{\partial}{\partial q_\alpha}(T-V)=0$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}(T-V)\right]-\frac{\partial}{\partial q_\alpha}(T-V)=0 \tag{25}$$

ومن المعادلة (25) أدخل لاجرانج الدالة الجديدة L التي هي دالة في $q_\alpha , \dot{q}_\alpha$ والزمن t.

$$L=T-V \tag{26}$$

حيث $L = L(q_1, q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n, t)$

بالتعويض من (26) في (25) نحصل على :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad (27)$$

وهذه معادلة لاجرانج والتي يمكن أن توضع في الصورة

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \qquad (28)$$

حيث P_α هي كمية الحركة المعممة $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$ ، ودالة الجهد V دالة في q_α فقط.

❖ ملاحظات هامة:

(١) إذا كان قسم من القوى المعممة غير محافظ وليكن Q'_k والقسم الآخر يمكن اشتقاقه من دالة جهد مثل V فيمكننا كتابة القوى المعممة على الصورة:

$$Q_k = Q'_k - \frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (29)$$

وعلى ذلك باستخدام تعريف دالة لاجرانج تصبح المعادلات التفاضلية للحركة على النحو التالي:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = Q'_k + \frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (30)$$

والمعادلة (29) مناسبة للاستخدام إذا كانت توجد قوى احتكاكية.

(٢) حركة المجموعة الديناميكية في الفراغ الثلاثي العادي الذي يتحرك فيه (x, y, z) تكون معادلة الحركة لكل جسيم وليكن v هي

$$m_v \frac{d\dot{x}_v}{dt} = F_{xv}, \quad m_v \frac{d\dot{y}_v}{dt} = F_{yv}, \quad m_v \frac{d\dot{z}_v}{dt} = F_{zv}$$

وعدد المعادلات 3 N.

في حالة استخدام دالة لاجرانج L ومعادلات لاجرانج $\dot{P}_x = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$ حيث $(\alpha = 1, 2, ...n)$ ، n هو بعد الفراغ التخيلي الذي تتحرك فيه النقطة الممكنة

للمجموعة الديناميكية والتي احداثياتها في هذا الفراغ هي الإحداثيات المعممة q_α وهي ترسم مساراً في الفراغ النوني الأبعاد أثناء حركة المجموعة الديناميكية في الفراغ الثلاثي العادي ومعادلات لاجرانج تمثل معادلات حركة بدلالة المفاهيم المعممة والتي تحل محل قانون نيوتن.

(٣) من معادلات لاجرانج (لدالة لاجرانج التي لا تعتمد على الزمن صراحة) يمكن استنتاج قاعدة ثبوت الطاقة للمجموعة المحافظة

$$L = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha) \tag{1}$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha\right) \tag{2}$$

ومن معادلة لاجرانج $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad , \alpha = 1, 2, ..., n$

بالضرب في $\dot{q}_\alpha$ والتجميع

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left[\dot{q}_\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\right] = 0 \tag{3}$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة :

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \left(\ddot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} + \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\right)\right] = 0 \tag{4}$$

من المعادلة (2)، (4) نحصل على

$$\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{n}\dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{dL}{dt} = 0 \tag{5}$$

بالتعويض عن $L = T - V$ مع ملاحظة أن V لا تعتمد على $\dot{q}_\alpha$ المعادلة (5) يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{n}\dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{d}{dt}(T - V) = 0 \tag{6}$$

ومنها نجد أن:

$$\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{n}\dot{q}_\alpha\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{d}{dt}(T-V)=0$$

وبما أن

$$2T=\sum_{\alpha=1}^{n}\dot{q}_\alpha\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{n}\dot{q}_\alpha P_\alpha \qquad (7)$$

باستخدام المعادلة (7) في (6)

$$\frac{d}{dt}(2T)-\frac{d}{dt}(T-V)=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(T+V)=0$$

ومنها نحصل على:

$$T+V=\text{constant}$$

المعادلة (7) تأتي من نظرية أويلر للدوال المتجانسة والتي تنص على أن الدالة $\Phi(x,y,z)$ دالة متجانسة من الرتبة n إذا تحقق الشرط

$$\Phi(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^n\,\Phi(x,y,z)$$

وللدوال المتجانسة يمكن تطبيق نظرية أويلر التي تنص على أن

$$x\,\Phi_x+y\,\Phi_y+z\,\Phi_z=n\,\Phi$$

ونظرية أويلر صحيحة أيضا إذا كانت الدالة Φ دالة في أكثر من ثلاثة متغيرات وحيث أن طاقة الحركة T هي دالة متجانسة من الدرجة الثانية في السرعات المعممة $\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_n$ لذلك يمكن تطبيق نظرية أويلر ومن ثم يمكن كتابة

$$\sum_{i=1}^{2}\dot{q}_i\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}=2T$$

مثال١:

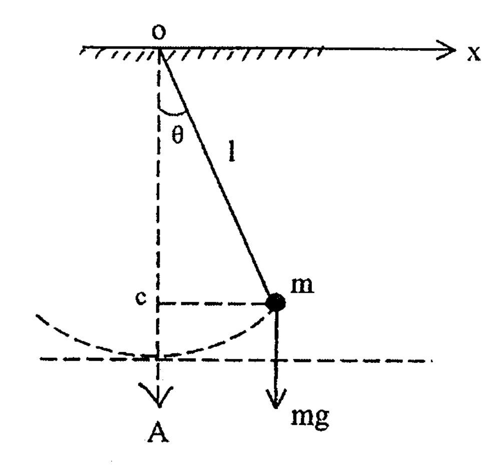
كون دالة لاجرانج للبندول البسيط ثم أوجد معادلة الحركة.

الحل

نفرض أن الزاوية التي يصنعها الخيط oB مع الرأسي oA هي θ ونفرض أن الجسيم المعلق في الخيط كتلته m وطول الخيط ℓ وهو مهمل الوزن.

واضح أن θ هي الإحداثي المعمم في هذه الحالة أي أن: $q=\theta$ لإيجاد طاقة الموضع (أو طاقة الجهد أو دالة الجهد) V نتبع الخطوات التالية:

شكل (٢- ١)



❖ سوف نعتبر خط قياس الطاقة هو المحور الأفقي ox.

❖ القوى المؤثرة هي الوزن رأسيا إلى أسفل mg وهي التي سوف تبذل شغلا بينما الشد في الخيط سوف لا يبذل شغلا لأنه ليس هناك حركة في اتجاه الخيط.

$V = -$ (الشغل المبذول) $\Rightarrow V = -mg($ oc البعد$)$

$$\therefore\ V=-mg\ell\ \cos\theta \qquad (1)$$

إيجاد طاقة الحركة للبندول:

$$T=\frac{1}{2}mv^2 \quad \text{where} \quad v=\ell\dot{\theta} \ \Rightarrow\ T=\frac{1}{2}m\,\ell^2\,\dot{\theta}^2 \qquad (2)$$

دالة لاجرانج تصبح في هذه الحالة على الصورة: $L=T-V$

$$L=\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2+mg\ell\cos\theta \qquad (3)$$

معادلة لاجرانج تصبح على الصورة التالية: $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})-\frac{\partial L}{\partial q}=0$

وباعتبار أن: $q=\theta,\ \dot{q}=\dot{\theta}$ فان معادلة لاجرانج تصبح على النحو التالي:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}})-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0 \qquad (4)$$

نوجد الآن التفاضلات الجزئية كالتالي:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\,\ell \sin\theta \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta}$$

$$\therefore \; \frac{d}{dt}(m\ell^2\dot{\theta}) = -mg\,\ell\sin\theta \quad \Rightarrow \qquad m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\,\ell \sin$$

ومنها نجد أن:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$$

بوضع: $\omega^2 = \frac{g}{\ell}$ نحصل على معادلة البندول البسيط كحركة توافقية بسيطة على الصورة التالية:

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta$$

وباعتبار $\sin\theta \cong \theta$ وذلك باعتبار θ صغير نحصل على:

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\,\theta$$

وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة حلها يعطى من:

$$\theta = A_1 \sin(\omega t \pm \varepsilon) \quad \text{or} \quad \theta = A_2 \cos(\omega t \pm \varepsilon)$$

والزمن الدوري يعطى من: $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi/\sqrt{g/\ell} = 2\pi\sqrt{\ell/g}$

والتردد (هو مقلوب الزمن الدوري) يعطى من: $\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/\ell}$

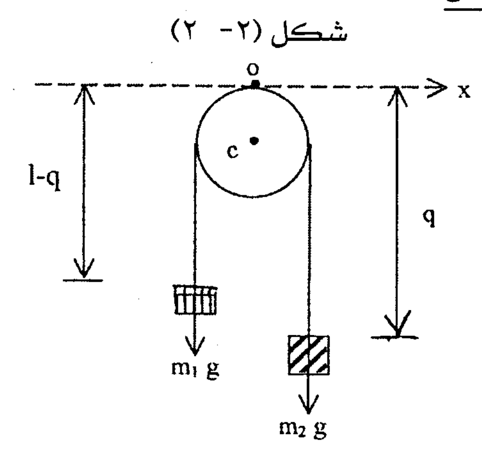
س: أوجد دالة الجهد إذا أخذ خط قياس الطاقة هو الخط الأفقي المار بالنقطة A (أسفل نقطة).

مثال ٢:

بكرة خفيفة ملساء مثبتة يمر عليها خيط خفيف طوله ℓ ، معلق في أحد طرفي الخيط كتلة m_1 والطرف الآخر كتلته m_2. (علما بأن $m_1 > m_2$) أوجد: أ) دالة لاجرانج في هذه الحالة. ب) العجلة التي تتحرك بها الكتلة m_1 .

الحـل

شكل (٢- ٢)



نفرض أن الخط الأفقي المار بأعلى نقطة في البكرة المثبتة هو خط قياس الجهد، ونفرض أن انخفاض الكتلة m_2 عن خط قياس الجهد هو q وانخفاض الكتلة m_1 يصبح:

$(\ell - q)$

وذلك لأن طول الخيط ℓ ثابت.

سرعة الكتلة m_2 تصبح: $v_2 = \dot{q}$

سرعة الكتلة m_1 تصبح: $v_1 = -\dot{q}$

وطاقة الحركة هي:

$$T = \frac{1}{2}m_1(-\dot{q})^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{q})^2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}\dot{q}^2(m_1 + m_2) \qquad (1)$$

طاقة الجهد تصبح:

$$V = -m_2gq - m_1g(\ell - q) \qquad (2)$$

دالة لاجرانج تصبح:

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2 - g(m_1 - m_2)q + m_1g\ell \qquad (3)$$

الآن نحسب:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -g(m_1 - m_2), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = (m_1 + m_2)\dot{q}$$

معادلة لاجرانج تصبح:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{q} = -g(m_1 - m_2)$$

$$\ddot{q} = -g\frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad \ddot{q} = \frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}g$$

وهذه هي العجلة المطلوبة.

مثال ٣:

بندول مزدوج (مكون من كتلتين m_1, m_2) مقيد الحركة في مستوى يهتز في مستوى رأسي. أ- أكتب دالة لاجرانج للمنظومة.

ب- أوجد معادلات الحركة باستخدام معادلات لاجرانج.

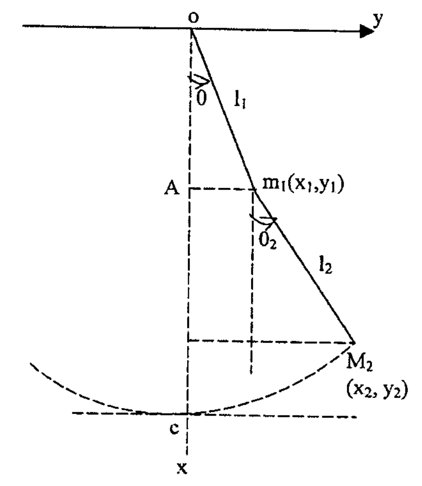
ج- إذا كانت $m = m_1 = m_2$, $\ell = \ell_1 = \ell_2$ فاكتب معادلات الحركة في هذه الحالة.

د- إذا كانت الذبذبات للبندول صغيرة. فأوجد ما تؤول إليه معادلات الحركة السابقة.

هـ- إذا كانت $\theta_1 = A_1 \cos \omega t,\ \ \theta_2 = A_2 \cos \omega t$ فأوجد الترددات العادية للبندول المزدوج.

الحل

شكل (٢- ٣)



من الشكل يمكن الحصول على:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \ell_1 \cos \theta_1 \\ y_1 &= \ell_1 \sin \theta_1 \\ x_2 &= \ell_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \cos \theta_2 \\ y_2 &= \ell_1 \sin \theta_1 + \ell_2 \sin \theta_2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

بتفاضل العلاقات السابقة بالنسبة للزمن t نحصل على:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\ell_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ \dot{y}_1 &= \ell_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \end{aligned} \quad (2)$$

وأيضا نجد أن:

$$\dot{x}_2 = -\ell_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - \ell_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2$$

$$\dot{y}_2 = \ell_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2$$

وبالتالي تكون طاقة الحركة للبندول هي:

$$T=\frac{1}{2}m_1 v_1^2+\frac{1}{2}m_2 v_2^2, \text{ where } \vec{v}_1=\dot{x}_1\vec{i}+\dot{y}_1\vec{j} \quad ,$$

$$\vec{v}_2=\dot{x}_2\vec{i}+\dot{y}_2\vec{j}, \quad v_1^2=\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2 \quad , \quad v_2^2=\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2$$

$$T=\frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2)+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2) \qquad (3)$$

وبالتعويض من (٢) في (٣) نحصل على:

$$T=\frac{1}{2}m_1\left[\left(-\ell_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1\right)^2+\left(\ell_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1\right)^2\right]$$
$$+\frac{1}{2}m_2\left[(-\ell_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1-\ell_2\dot{\theta}_2\ \sin\theta_2)^2\right.$$
$$\left.+(\ell_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1+\ell_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2)^2\right]$$

والتي يمكن اختصارها للصورة التالية:

$$T=\frac{1}{2}m_1\ell_1^2\,\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m_2[\ell_1^2\,\dot{\theta}_1^2+\ell_2^2\,\dot{\theta}_2^2+2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1\,\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)]$$

ونوجد الآن طاقة الجهد للبندول المزدوج ولذا نختار مستوى قياس للطاقة وليكن المستوى الأفقي المار بالنقطة c أي المستوى الذي يقع على بعد $\ell_1+\ell_2$ أسفل نقطة التعليق فتكون طاقة الجهد للبندول المركب على النحو التالي:

$$\left.\begin{aligned}V&=m_1g(\ell_1-\ell_1\cos\theta_1)\\&\quad+m_2g[\ell_1+\ell_2-(\ell_1\cos\theta_1+\ell_2\cos\theta_2)]\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

وتكون دالة لاجرانج هي: $L=T-V$

$$L=\frac{1}{2}m_1\ell_1^2\,\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m_2\left[\ell_1^2\,\dot{\theta}_1^2+\ell_2^2\dot{\theta}_2^2\right.$$
$$\left.+2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right]-m_1g[\ell_1+\ell_2-\ell_1\cos\theta_1]$$
$$-m_2g[\ell_1+\ell_2-(\ell_1\cos\theta_1+\ell_2\cos\theta_2)]$$

وهذا هو المطلوب الأول.

ب) لإيجاد معادلات الحركة باستخدام معادلات لاجرانج نكتب المعادلتان التاليتان المصاحبتان لكل من الإحداثيين المعممين θ_1,θ_2 كالتالي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_1}=0 \qquad (4)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_2}=0 \qquad (5)$$

من (٣) نجد أن:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1}=-m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)-m_1 g\,\ell_1\sin\theta_1$$
$$-m_2 g\,\ell_1\sin\theta_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}=m_1\ell_1^2\dot{\theta}_1+m_2\left[\ell_1^2\dot{\theta}_1+\ell_1\ell_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right)=m_1\ell_1^2\ddot{\theta}_1+m_2\left[\ell_1^2\ddot{\theta}_1+\ell_1\ell_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right]$$
$$-m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\sin(\theta_1-\theta_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2}=m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)-m_2 g\,\ell_2\sin\theta_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}=m_2\ell_2^2\dot{\theta}_2+m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right)=m_2\ell_2^2\ddot{\theta}_2+m_2\ell_1\ell_2\left[\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)\right.$$
$$\left.-\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)-\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$$

وبذلك تصبح المعادلات على (٢) على الصورة:

$$m_1\ell_1^2\ddot{\theta}_1+m_2\ell_1^2\ddot{\theta}_1+m_2\ell_1\ell_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)$$
$$-m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\sin(\theta_1-\theta_2)$$
$$=-m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)-m_1 g\,\ell_1\sin\theta_1-m_2 g\,\ell_1\sin\theta_1$$

$$m_2\ell_2^2\ddot{\theta}_2+m_2\ell_1\ell_2\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)-m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\sin(\theta_1-\theta_2)$$
$$=m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)-m_2 g\,\ell_2\sin\theta_2$$

المعادلتان السابقتان تختصران على الترتيب إلى:

$$(m_1+m_2)\,\ell_1^2\ddot{\theta}_1+m_2\ell_1\ell_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)$$
$$=-(m_1+m_2)\,g\,\ell_1\sin\theta_1 \qquad (6)$$

$$m_2\ell_2^2\ddot{\theta}_2+m_2\ell_1\ell_2\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)-m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2) \qquad (7)$$
$$=-m_2 g\,\ell_2\sin\theta_2$$

ثالثا: إذا كانت $m=m_1=m_2$ ، $\ell=\ell_1=\ell_2,$

فإن المعادلتين (٦)، (٧) تصبحان:

$$2\ell\,\ddot{\theta}_1+\ell\,\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+\ell\,\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)$$
$$=-2g\sin\theta_1 \qquad (8)$$
$$\ell\,\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)+\ell\,\ddot{\theta}_2-\ell\,\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)$$
$$=-g\sin\theta_2 \qquad (9)$$

رابعا: في حالة الذبذبات الصغيرة فإن: $\sin\theta\cong\theta,\ \cos\theta\cong 1$ وإهمال الحدود التي تشتمل على المضروب $\dot{\theta}^2\theta$ فإن المعادلتين (٨)، (٩) تصبحان:

$$\ell\,\ddot{\theta}_1+\ell\,\ddot{\theta}_2=-g\,\theta_2 \qquad (10)$$
$$2\ell\,\ddot{\theta}_1+\ell\,\ddot{\theta}_2=-g\,\theta_1 \qquad (11)$$

ولإيجاد الترددات العادية، نضع: $\theta_1=A_1\cos\omega t,\ \ \theta_2=A_2\cos\omega t,$ أو $(A_1e^{i\omega t},A_2e^{i\omega t})$ في المعادلتين (٩)، (١٠) وعندئذ تصبحان:

$$2(g-\ell\omega^2)A_1-\ell\omega^2A_2=0$$
$$-\ell\omega^2A_1+(g-\ell\omega^2)A_2=0 \qquad (12)$$

ولكي لا تكون A_1,A_2 مساوية للصفر فإن محدد المعاملات يجب أن يساوي الصفر أي أن:

$$\begin{vmatrix} 2(g-\ell\omega^2) & -\ell\omega^2 \\ -\ell\omega^2 & g-\ell\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

أو: $\ell^2\omega^4-\dfrac{4}{g\omega^2}+2g^2=0$ بالحل نجد أن:

$$\omega^2 = \frac{4\ell g \pm \sqrt{16\ell^2 g^2 - 8\ell^2 g^2}}{2\ell^2} = \frac{\left(2 \pm \sqrt{2}\right)g}{\ell}$$

أو:

$$\omega_1^2 = \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)g}{\ell}, \quad \omega_2^2 = \frac{\left(2-\sqrt{2}\right)g}{\ell} \qquad (13)$$

الترددان العاديان يعطيان:

$$\nu_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)g}{\ell}}, \quad \nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)g}{\ell}} \qquad (14)$$

ب) بالتعويض عن $\omega^2 = \omega_1^2 = (2+\sqrt{2})g/\ell$ في معادلتي (١٢) يؤدي إلى:

$$A_2 = -\sqrt{2}A_1 \qquad (15)$$

وهذا يناظر النسق العادي للتذبذب الذي تكون فيه الأثقال متحركة في اتجاهات مضادة.

بالتعويض عن $\omega^2 = \omega_2^2 = (-\sqrt{2})g/\ell$ في معادلتي (١٢) نحصل علي:

$$A = -\sqrt{2}A_1 \qquad (16)$$

وهذا يناظر النسق العادي للتذبذب الذي تكون الأثقال فيه في نفس الاتجاهات.

مثال ٤:

خرزة تنزلق بدون احتكاك على سلك أملس شكله هو منحنى سيكلويد (دويرى) كما بشكل (٢- ٤)، علاقات التحويل بين الإحداثيات الكرتيزية والإحداثي المعمم كالتالي: $x = a(\theta - \sin\theta)\,,\ y = a(1+\cos\theta)$ حيث $o \le \theta \le 2\pi$

أوجد: أ- دالة لاجرانج ب- معادلة الحركة جـ- أثبت أن معادلة الحركة المستنتجة يمكن كتابتها على صورة معادلة الحركة التوافقية البسيطة التالية: $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{g}{4a}u = 0$ وذلك باستخدام التعويض $u = \cos\frac{\theta}{2}$ ثم أوجد الزمن الدوري لذبذبة الخرزة في هذه الحالة.

الحل

طاقة الحركة تعرف كالتالي:

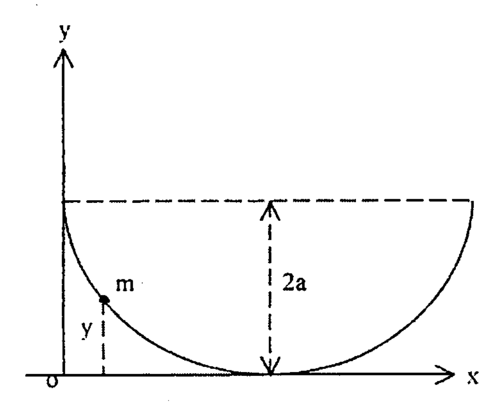
$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) \qquad (1)$$

بإجراء التفاضل بالنسبة للزمن للمعادلتين البارمتريتين لمنحنى السيكلويد نحصل على:

$$\dot{x}=a\,(1-\cos\theta)\,\dot{\theta}, \qquad \dot{y}=-a\sin\theta\,\dot{\theta} \qquad (2)$$

بالتعويض من (٢) في (١) نحصل على:

شكل (٢- ٤)



$$T=\frac{1}{2}ma^2\left[(1-\cos\theta)^2\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2\left[1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta\right]$$

التي تختصر إلى الصورة التالية:

$$T=m\,a^2\dot{\theta}^2\left[(1-\cos\theta)\right] \qquad (3)$$

وطاقة الحركة يمكن إيجادها فتكتب على الصورة التالية:

$$V=mg\,y=mg\,a(1+\cos\theta) \qquad (4)$$

إذا دالة لاجرانج تصبح:

$$L=T-V$$

$$L=ma^2(1-\cos\theta)\dot{\theta}^2-mg\,a(1+\cos\theta)$$

هذه هي دالة لاجرانج.

إيجاد معادلة الحركة:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=2m\,a^2(1-\cos\theta)\dot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial\theta}=ma\sin\theta\,\dot{\theta}^2+mg\,a\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = 2m\,a^2\dot\theta^2(\sin\theta) + 2m\,a^2(1-\cos\theta)\,\ddot\theta$$
$$= 2ma^2\left[(1-\cos\theta)\,\ddot\theta + \sin\theta\,\dot\theta^2\right]$$

بالتعويض من التفاضلات السابقة في (٥) نحصل على:

$$2m\,a^2\left[(1-\cos\theta)\,\ddot\theta\right] + 2m\,a^2\sin\theta\,\dot\theta^2 - ma^2\sin\theta\,\dot\theta^2$$
$$-\,mg\,m\sin\theta = 0$$
$$2ma\,(1-\cos\theta)\,\ddot\theta + ma\sin\theta\dot\theta^2 - mg\,a\sin\theta = 0$$

جـ- باستخدام التعويض المعطي: $u = \cos\frac{\theta}{2}$ نجد أن:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,\dot\theta \;\Rightarrow\; \frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,\ddot\theta - \frac{1}{4}\cos\frac{\theta}{2}\,\dot\theta^2$$
$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{1}{4}\left[\sin\frac{\theta}{2}\,\ddot\theta - \frac{1}{4}\cos\frac{\theta}{2}\,\dot\theta^2\right] \qquad (7)$$

ولكن من العلاقات المعروفة في حساب المثلثات نجد أن:

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \;\Rightarrow\; 1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

بالتعويض في المعادلة (٦) المستنتجة نجد أن:

$$4ma\sin^2\frac{\theta}{2}\,\ddot\theta + 2ma\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,\dot\theta^2 - 2mg\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 0$$

بالقسمة على $2ma\sin\frac{\theta}{2}$ نحصل على:

$$2\sin\frac{\theta}{2}\,\ddot\theta + \cos\frac{\theta}{2}\,\dot\theta^2 - \frac{g}{a}\cos\frac{\theta}{2} = 0 \qquad (8)$$

من المعادلتين (٧)، (٨) نحصل على:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{9}{4a}u = 0, \quad \text{where} \quad \omega = \sqrt{g/(4a)}$$

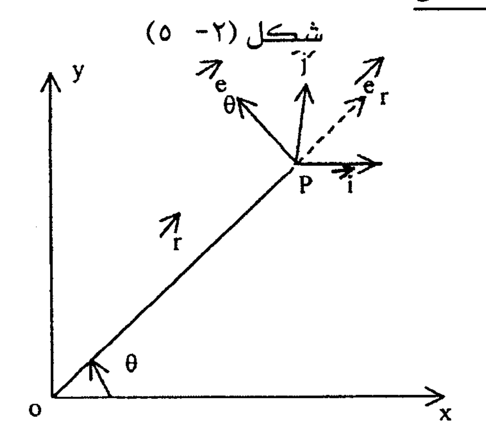
وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة فيها. ويكون الزمن الدوري τ :

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{g/(4a)}} = 2\pi\sqrt{(4a)/g} \quad \Rightarrow \quad \tau = 4\pi\sqrt{a/g}$$

مثال ٥: (حركة جسيم في مجال مركزي تحت تأثير قوة مركزية).
يتحرك جسيم ذو كتلة m في مستوى تحت تأثير دالة جهد هي دالة فقط لبعد الجسيم من نقطة ثابتة في المستوى. أوجد معادلة لاجرانج لحركة هذا الجسيم.

الحل

شكل (٢- ٥)



نفرض أن النقطة الثابتة هي نقطة أصل الإحداثيات القطبية (r,θ) كما هو مبين بالرسم. العلاقة بين نظامي الإحداثيات الكرتيزية والقطبية المستوية هي:

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \quad (1)$$

طاقة الحركة للجسيم T تعطى من:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (2)$$

من (١) في (٢) بعد إجراء التفاضلات نحصل على:

$$T = \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}\right)^2 + \left(\dot{r}\sin\theta - r\cos\theta\,\dot{\theta}\right)\right]^2$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\,\theta^2\right) \quad (3)$$

وإذا عبرنا عن طاقة الجهد بـ V_r فيمكننا كتابة دالة لاجرانج بالشكل التالي:

$$L = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2] - V_r \quad (4)$$

وتكون معادلات لاجرانج للحركة على الصورة:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0 \quad (5)\ ,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0 \qquad (5)$$

والمشتقات الجزئية المناسبة هي:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot r}=m\dot r,\qquad \frac{\partial L}{\partial r}=m r\dot\theta^2-\frac{\partial V_r}{\partial r}=m r\dot\theta^2 - F_r$$

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \theta}=0 \qquad ,\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}=m r^2\dot\theta\ \right\} \qquad (6)$$

بالتعويض من (٦) في (٥) نحصل على معادلات حركة الجسيم كالتالي:

$$m(\ddot r - r\dot\theta^2)=F_r,\qquad \frac{d}{dt}(m r^2\dot\theta)=0 \qquad (7)$$

<u>وهذه هي المعادلات التي درست من قبل في حالة حركة جسيم في مجال مركزي</u>

❖ **<u>ملاحظة:</u>**

كان من الممكن كتابة طاقة الحركة مباشرة كالتالي:

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(\dot r^2+r^2\dot\theta^2)$$

وذلك لأن:

$$\vec v=\dot r\,\vec e_r+r\,\dot\theta\,\vec e_\theta$$

مثال ٦:

إذا كانت دالة لاجرانج لمنظومة ميكانيكية هي:

$$L=(k+\frac{1}{2})\dot q_1^2+\dot q_1\dot q_2+\frac{1}{2}\dot q_2^2-\frac{n^2}{2}(k+1)q_1^2-\frac{n^2}{2}q_2^2$$

أ- اكتب معادلات لاجرانج للحركة　ب- أثبت أن: $q_1-q_2=A\cos(N+B)$

حيث A,B,N,k,n كميات ثابتة.　وأن: $N^2k=(k+1)n^2$

جـ- أوجد حل معادلات الحركة المستنتجة أي أوجد: $q_1(t)\,,\,q_2(t)$.

الحـل

دالة لاجرانج المعطاه هي دالة في الإحداثيين المعممين q_1 , q_2 وهي:

$$L = (k+\frac{1}{2})\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 - \frac{n^2}{2}(k+1)q_1^2 - \frac{n^2}{2}q_2^2$$

ومنها يمكن إيجاد التفاضلات الجزئية التالية:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -n^2(k+1)q_1 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial q_2} = -n^2 q_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 2(k+\frac{1}{2})\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_1 + \dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = 2(k+\frac{1}{2})\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2$$

وعلى ذلك معادلات لاجرانج تصبح:

$$2(k+\frac{1}{2})\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + n^2(k+1)q_1 = 0 \qquad (1)$$

$$\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + n^2 q_2 = 0 \qquad (2)$$

بضرب (٢) في (k+1) نجد أن:

$$(k+1)\ddot{q}_1 + (k+1)\ddot{q}_2 + n^2(k+1)q_2 = 0 \qquad (3)$$

بطرح (٣) من (١) نجد أن:

$$k(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) + n^2(k+1)(q_1 - q_2) = 0 \qquad (4)$$

بوضع: $x = q_1 - q_2$ المعادلة (٤) تصبح على شكل معادلة تفاضلية (معادلة حركة توافقية بسيطة) على الصورة:

$$k\ddot{x} + n^2(k+1)x = 0$$

وحلها معروف هو:

$$x = A\cos(\sqrt{\frac{n^2(k+1)}{k}}t + B)$$

بوضع: $N^2 = \dfrac{n^2(k+1)}{k}$ ، الحل السابق يأخذ الشكل التالي:

$$x = A\cos(Nt+B) \quad \Rightarrow \quad q_1 - q_2 = A\cos(Nt+B) \qquad (5)$$

جـ- لإيجاد حل معادلات الحركة (١) ، (٢) أي أوجد: $q_1(t), q_2(t)$ نتبع الخطوات التالية، بجمع (١)،(٢) نجد أن:

$$[2(k+\frac{1}{2})+1]\ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2 + [n^2(k+1)q_1] + n^2 q_2 = 0$$

$$2[(k+2)\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2] + n^2[(k+1)q_1 + q_2] = 0$$

بوضع:

$$y = (k+1)q_1 + q_2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = (k+1)\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2$$

ومنها نجد أن:

$$2\ddot{y} + n^2 y = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = -\frac{n^2}{2} y \quad \text{where} \quad \omega^2 = \frac{n^2}{2} \qquad (6)$$

المعادلة (6) أصبحت على شكل معادلة تفاضلية أيضا (معادلة حركة توافقية بسيطة) حلها يمكن وضعه على الصورة:

$$y = C_1\cos(\omega t + D)$$

أي أن:

$$(k+1)q_1 + q_2 = C_1\cos(\frac{n}{\sqrt{2}}t + D) \qquad (7)$$

بجمع الحلين (٥) ، (٧) نحصل على:

$$(k+2)q_1 = A\cos(Nt+B) + C_1\cos(\frac{n}{\sqrt{2}}t + D)$$

$$q_1 = \frac{A}{k+2}\cos(Nt+B) + \frac{C}{k+2}\cos(\frac{n}{\sqrt{2}}t + D)$$

وهذه هي $q_1(t)$ وبطرح المعادلتين (٥)، (٧) نحصل على:

$$(k+2)q_2 = -(k+1)A\cos(Nt+B) + C\cos(\frac{n}{\sqrt{2}}t+D)$$

ومنها نحصل على $q_2(t)$ على الصورة التالية:

$$q_2 = \frac{-(k+1)}{k+2}A\cos(Nt+B) + C\cos(\frac{n}{\sqrt{2}}t+D)$$

مثال ٧:

قذف جسيم كتلته m يتحرك في مجال محافظ في المستوي xy وكانت له طاقتي الجهد والحركة كالتالي: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ $V = mgy,$

أ- أوجد دالة لاجرانج وأوجد معادلتي لاجرانج للحركة في اتجاه محوري xy.

ب- أوجد كل من x, y إذا كانت الشروط الابتدائية هي كالتالي: الجسيم قذف في البداية بسرعة ابتدائية مقدارها $v_\circ$ تميل على الأفقي بزاوية α وكانت نقطة القذف هي نقطة الأصل.

الحل

دالة لاجرانج هي كالتالي:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

معادلتي الحركة:

(i) في اتجاه محور x أو في اتجاه الإحداثي المعمم x وهي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \qquad (1)$$

(ii) في اتجاه محور y هي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial y} \qquad (2)$$

نوجد الآن التفاضلات الجزئية أو العادية كالتالي:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\dot{x} \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

وبالتعويض في (١) نجد أن:

$$m\ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y}, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -mg$$

بالتعويض في (٢) نجد أن:

$$m\ddot{y} = -mg \Rightarrow \quad \ddot{y} = -g \qquad (4)$$

ب- الشروط المعطاة يمكن كتابتها رياضيا كالتالي:

$$\text{at} \quad t = 0, \quad x = 0, \quad y = 0 \qquad (5)$$

$$\text{at} \quad t = 0, \quad \left.\begin{array}{l} \dot{x} = v_\circ \cos\alpha \\ \dot{y} = v_\circ \sin\alpha \end{array}\right\} \qquad (6)$$

ومن المعادلة (٣) نجد أن:

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow \quad \dot{x} = c_1$$

حيث c_1 ثابت تكامل يعين من الشروط السابقة.

من الشرط (٦) نجد أن: $\text{at} \quad t = 0, \quad \dot{x} = v_\circ \cos\alpha = c_1$ ومنها يكون:

$$\dot{x} = v_\circ \cos\alpha \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = v_\circ \cos\alpha$$

وبالتكامل مرة أخرى بالنسبة للزمن نجد أن: $x = (v_\circ \cos\alpha)t + c_2$

حيث c_2 ثابت تكامل يعين من الشروط وهي:

$$\text{at} \quad t = 0, \quad x = 0 \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

$$\therefore x = (v_\circ \cos\alpha)t$$

وبالمثل من المعادلة (٤) يكون : $\ddot{y} = -g$ وبالتكامل بالنسبة للزمن نحصل على:

$$\dot{y} = -gt + c_3$$

حيث c_3 ثابت تكامل يعين باستخدام الشروط وهي:

$$\text{at} \quad t=0, \quad \dot{y}=v_\circ \sin\alpha \Rightarrow \quad c_3=v_\circ \sin\alpha$$
$$\therefore \dot{y}=v_\circ \sin\alpha - gt$$

وبالتكامل مرة أخرى نجد أن: $y=(v_\circ \sin\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2+c_4$ حيث c_4 ثابت تكامل ويوجد باستخدام الشروط وهي:

$$\text{at} \quad t=0, \quad y=0 \Rightarrow \quad c_4=0$$
$$y=(v_\circ \sin\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2$$

مثال ٨:
إذا كان الفرق بين طاقتي الحركة والموضع لمنظومة ميكانيكية يعطي من العلاقة التالية: $\frac{\dot{x}^2}{2(A+By^2)}+\frac{1}{2}\dot{y}^2-cy^2$
حيث A,B,C ثوابت. أوجدي معادلات الحركة لهذه المنظومة.

الحل

دالة لاجرانج معطاة من المثال التالي:

$$L=\frac{\dot{x}^2}{2(A+By^2)}+\frac{1}{2}\dot{y}^2-cy^2 \qquad (1)$$

معادلات لاجرانج تصبح:

(١) المعادلة التي في اتجاه الإحداثي المعمم x وهي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{\partial L}{\partial x} \qquad (2)$$

(٢) المعادلة التي في اتجاه الإحداثي المعمم y هي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)=\frac{\partial L}{\partial y} \qquad (3)$$

والآن نجري التفاضلات الجزئية والعادية كالتالي:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\frac{\dot{x}}{(A+By^2)} \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{(A+By^2)\ddot{x}-\dot{x}(2By\dot{y})}{(A+By^2)^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{-\dot{x}^2(4By)}{4(A+By^2)^2} - 2cy$$

بالتعويض من هذه التفاضلات في (٢)، (٣) نجد أن:

$$\frac{(A+By^2)\ddot{x} - \dot{x}(2By\dot{y})}{(A+By^2)^2} = 0 \Rightarrow (A+By^2)\ddot{x} - \dot{x}(2By\dot{y}) = 0 \qquad (4)$$

$$\ddot{y} = \frac{-B\dot{x}^2 y}{(A+By^2)^2} - 2cy \qquad (5)$$

مثال ٩:

إذا كانت دالة لاجرانج لنظام ما معطاة بالمعادلة التالية:

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - \left(q_1 + q_2\right)^2$$

أوجد معادلات لاجرانج للحركة ثم أوجد $q_1(t), \quad q_2(t)$

الحل

لإيجاد معادلات لاجرانج (وهما معادلتان حيث لدينا احداثيان معممان هما q_1, q_2) نجد المشتقات التالية:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{1}{2}(2\dot{q}_1) = \dot{q}_1 \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = \ddot{q}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = \ddot{q}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -2\left(q_1 - q_2\right) \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial q_2} = +2\left(q_1 - q_2\right)$$

إذا معادلة لاجرانج الأولى تصبح:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{q}_1 + 2(q_1 - q_2) = 0 \qquad (1)$$

معادلة لاجرانج الثانية تصبح:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_2}=0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{q}_2-2(q_1-q_2)=0 \qquad (2)$$

والمعادلتان (١)،(٢) هما معادلتي الحركة لاجرانج المطلوبتين:

بجمع المعادلتين (١)،(٢) نجد أن:

$$\ddot{q}_1+\ddot{q}_2=0 \qquad (3)$$

وبالتكامل بالنسبة للزمن نحصل على:

$$\dot{q}_1+\dot{q}_2=A$$

وبالتكامل مرة أخرى بالنسبة للزمن نحصل على:

$$q_1+q_2=At+B \qquad (4)$$

بطرح المعادلتين (١)،(٢) نجد أن:

$$\ddot{q}_1-\ddot{q}_2+4(q_1-q_2)=0 \qquad (5)$$

نفرض أن:

$$x=q_1-q_2 \Rightarrow \quad \ddot{x}=\ddot{q}_1-\ddot{q}_2\} \qquad (6)$$

بالتعويض من (٦) في (٥) نجد أن:

$$\ddot{x}+4x=0 \qquad (7)$$

$$\ddot{x}=-4x$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية والدرجة الأولى وسبق دراستها في موضوع الحركة التوافقية البسيطة وحلها معروف أو يمكن إيجاده بسهولة على الصورة:

$$x=c\cos(2t+\alpha) \qquad (8)$$

$$\therefore q_1-q_2=c\cos(2t+\alpha) \qquad (9)$$

من (٤)،(٩) بالجمع نجد أن:

$$2q_1=c\cos(2t+\alpha)+At+B$$

$$q_1=\frac{1}{2}\left[c\cos(2t+\alpha)+At+B\right] \qquad (10)$$

بطرح (٤) من (٩) نجد أن:

$$q_1 - q_2 - q_1 - q_2 = c\cos(2t+\alpha) - At - B$$
$$-2q_2 = c\cos(2t+\alpha) - At - B$$
$$q_2 = -\frac{1}{2}\{c\cos(2t+\alpha) - At - B\} \qquad (11)$$

وهو المطلوب.

ملاحظة: المعادلة التفاضلية $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$ سبق التعامل معها من قبل في أكثر من موضع ولها المعادلة المساعدة: $m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2i$ وعلى ذلك حلها يصبح على الصورة:

$$x = c_1 e^{2it} + c_2 e^{-2it}$$
$$= c_1[\cos 2t + i\sin 2t]$$
$$= c_2[\cos 2t - i\sin 2t]$$
$$= c\cos(2t+\alpha)$$

مثال ١٠: (آلة أتود المزدوجة):

❖ كتلة m_1 معلقة عند أحد طرفي خيط خفيف طوله ℓ_1 يمر على بكرة خفيفة مثبتة ملساء وعند الطرف الآخر للخيط توجد بكرة خفيفة أيضا ومثبتة وملساء يمر عليها خيط خفيف طوله ℓ_2 ويحمل كتلتين m_2, m_3. أوجد: أ- دالة لاجرانج ومعادلات لاجرانج.

الحل

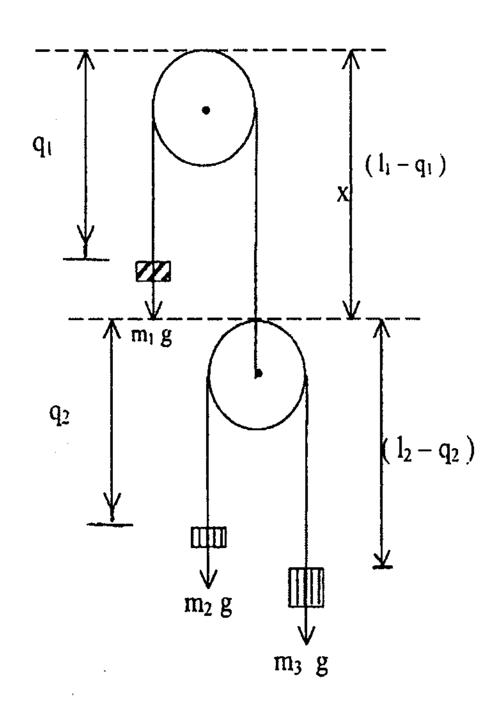
توجد درجتان حرية للمنظومة q_1, q_2 هما الإحداثيان المعممان. أيضا البكرتان خفيفتا الوزن وكذلك الخيوط ℓ_1, ℓ_2 نوجد أولا: طاقة الحركة للمجموعة كالتالي:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(-\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2}m_3(-\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2$$

أي أن:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}m_3(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)$$

شكل (٢- ٦)



إذا طاقة الحركة تصبح في الصورة التالية:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\dot{q}_1^2 + (m_3 - m_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\dot{q}_2^2$$

<u>نوجد الآن طاقة الجهد:</u>

$$V = -m_1gq_1 - m_2g[q_2 + \ell_1 - q_1] - m_3g[(\ell_1 - q_1) + (\ell_2 - q_2)]$$

والتي يمكن اختصارها على النحو التالي:

$$V = (m_2 + m_3 - m_1)gq_1 + (m_3 - m_2)gq_2 - (m_2\ell_1 + m_3\ell_1 + m_3\ell_2)g$$

على ذلك تصبح دالة لاجرانج على الصورة التالية:

$$L = T - V \qquad (2)$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\dot{q}_1^2 + (m_3 - m_2)\dot{q}_1\dot{q}_2$$
$$+\frac{1}{2}(m_2 + m_3)\dot{q}_2^2 - (m_2 + m_3 - m_1)gq_1 \qquad (3)$$
$$-(m_3 - m_2)gq_2 + [m_2\ell_1 + m_3(\ell_1 + \ell_2)]g$$

ولإيجاد معادلات الحركة من دالة لاجرانج L تصبح المعادلة الأولى المصاحبة للإحداثي q_1 كالتالي:

$$(m_1 + m_2 + m_3)\dot{q}_1 + (m_3 - m_2)\ddot{q}_2 = -(m_2 + m_3 - m_1)g \qquad (4)$$

وذلك لأن:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2 + m_3)\dot{q}_1 + (m_3 - m_2)\dot{q}_2,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{q}_1 + (m_3 - m_2)\ddot{q}_2,$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -(m_2 + m_3 - m_1)g$$

بالمثل معادلة لاجرانج الثانية المصاحبة للإحداثي q_2 تصبح كالتالي:

$$\therefore (m_3 - m_2)\ddot{q}_1 + (m_2 + m_3)\ddot{q}_2 = -(m_3 - m_2)g \qquad (5)$$

وذلك لأن:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = (m_3 - m_2)\dot{q}_1 + \frac{2}{2}(m_2 + m_3)q_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = (m_3 - m_2)\ddot{q}_1 + (m_2 + m_3)\ddot{q}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -(m_3 - m_2)g$$

المعادلتان (٤)، (٥) هما معادلتا الحركة في هذه الحالة.

مثال ١١:

AB يمثل سلكا مستقيما أملس مثبتا عند النقطة A على محور رأسي OA بحيث يدور AB حول OA بسرعة زاوية ثابتة ω. وضعت خرزة كتلتها m بحيث تكون مقيدة لتتحرك على السلك.

أ- أوجد دالة لاجرانج. ب- أكتب معادلات لاجرانج. جـ- حدد الحركة عند أي لحظة. د- بفرض أن الخرزة بدأت من السكون عند A ما هو الزمن الذي تستغرقه حتى تصل إلى طرف السلك B (بفرض أن طول السلك هو ℓ).

الحـل

أ- نفرض أن r هي المسافة التي تبعدها الخرزة عن النقطة A على السلك عند اللحظة t. الإحداثيات المتعامدة للخرزة تعطي من:

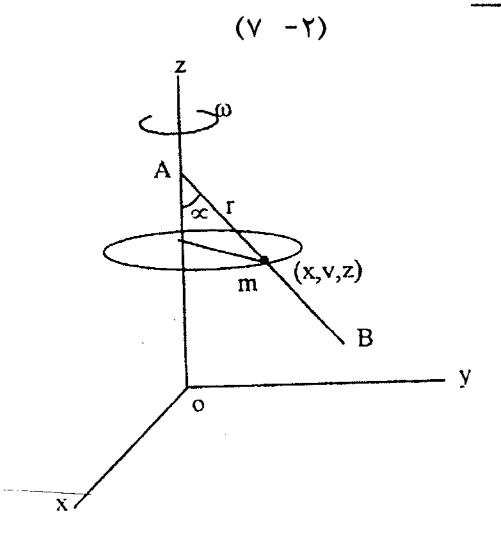
$$x = r\sin\alpha\cos\omega\, t$$

$$y = r\sin\alpha\sin\omega\, t$$

$$x = h - r\cos\alpha$$

حيث افترضنا أن السلك عند اللحظة t

(٢- ٧)



يكون في المستوي xz وان المسافة من O إلى A هي h. وعلى ذلك تكون طاقة حركة الخرزة هي:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$T = \frac{1}{2}m\{(\dot{r}\sin\alpha\cos\omega t - \omega r\sin\alpha\sin\omega t)^2 + (\dot{r}\sin\alpha\sin\omega t + \omega r\sin\alpha\sin\omega t)^2 + (-\dot{r}\cos\alpha)^2\}$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \sin^2 \alpha)$$

وطاقة الجهد باعتبار المستوي xy مستوي قياسيا هي:

$$V = mgz = mg(h - r\cos\alpha)$$

وبذلك تكون دالة لاجرانج هي:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m(r^2 + \omega^2 r^2 \sin^2 \alpha) - mg(h - r\cos\alpha)$$

ب- إيجاد معادلات لاجرانج:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m\omega^2 r \sin^2 \alpha + mg\cos\alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

ومعادلة لاجرانج هي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

أو:

$$m\ddot{r} - (m\omega^2 r \sin\alpha + mg\cos\alpha) = 0$$

أي أن:

$$\ddot{r} - (\omega \sin^2 \alpha) r = g\cos\alpha \qquad (1)$$

جـ- الحل العام للمعادلة (١) بوضع الطرف الأيمن يساوي صفرا هو:

$$r_c = c_1 e^{(\omega \sin\alpha)t} + c_2 e^{-(\omega \sin\alpha)t}$$

وحيث أن الطرف الأيمن للمعادلة (١) يكون ثابتا فإن الحل الخاص هو:

$$r_p = \frac{-g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة (١) هو:

$$r = r_c + r_p = c_1 e^{(\omega \sin\alpha)t} + c_2 e^{-(\omega \sin\alpha)t} - \frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha} \quad (2)$$

هذه النتيجة يمكن أيضا كتابتها بدلالة الدوال الزائدية على الصورة:

$$r = c_3 \cosh(\omega \sin\alpha)t + c_4 \sinh(\omega \sin\alpha)t - \frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha} \quad (3)$$

د- استخدام الشروط المعطاة لتعيين الثوابت ·· حيث أن الخرزة تبدأ من السكون عند $t = 0$ يكون لدينا $r = 0$، $\dot{r} = 0$ عند $t = 0$. وعندئذ من المعادلة (٢) يكون:

$$c_1 - c_2 = 0, \quad c_1 + c_2 = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha}$$

أي أن:

$$c_1 = c_2 = \frac{g\cos\alpha}{2\omega^2 \sin^2\alpha}$$

والمعادلة (٢) تصبح:

$$r = \frac{g\cos\alpha}{2\omega^2 \sin^2\alpha}\left\{e^{(\omega\sin\alpha)t} + e^{-(\omega\sin\alpha)t}\right\} - \frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha} \quad (1)$$

أو:

$$r = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha}\{\cosh(\omega \sin\alpha)t - 1\} \quad (2)$$

ويمكن الحصول عليها كذلك من المعادلة (٣) عندما تكون $r = \ell$ فإن المعادلة (٢) تعطي:

$$\cosh(\omega \sin\alpha)t = \ell + (\ell\omega^2 \sin^2\alpha)/g\cos\alpha$$

وبذلك يكون الزمن المطلوب هو:

$$t=\frac{\ell}{\omega\sin\alpha}\cosh^{-1}\left(\ell+\frac{\ell\omega^2\sin^2\alpha}{g\cos^2\alpha}\right)$$

$$=\frac{1}{\omega\sin\alpha}\ln\left\{\left(\ell+\frac{\ell\omega^2\sin^2\alpha}{g\cos^2\alpha}\right)+\sqrt{\left(\ell+\frac{\ell\omega^2\sin^2\alpha}{g\cos^2\alpha}\right)^2-1}\right\}$$

مثال ١٢:
جسيم كتلته m يتحرك في مجال قوة محافظ. أوجد في الإحداثيات الأسطوانية (ρ,ϕ,z) : أ- دالة لاجرانج. ب- معادلات الحركة جـ- وإذا كان الجسيم يتحرك في المستوي xy وكانت دالة الجهد تعتمد فقط على البعد عن نقطة الأصل، في هذه الحالة V تعتمد فقط على ρ $(z=0)$ ⋅أوجدي معادلات الحركة في هذه الحالة⋅

الحل

أ) طاقة الحركة الكلية = $T=\frac{1}{2}m[\rho^2+\rho^2\phi^2+z^2]$

طاقة الجهد $V=V(\rho,\phi,z)$ عندئذ تكون دالة لاجرانج هي:

$$L=T-V=\frac{1}{2}m[\dot\rho^2+\rho^2\dot\phi^2+\dot z^2]-V(\rho,\phi,z)$$

ب) معادلات لاجرانج هي:

❖المعادلة الأولى وليكن لها الإحداثي المعمم الأول هو: ρ

$$\frac{\partial L}{\partial\rho}=m\rho\dot\phi^2-\frac{\partial V}{\partial\rho},\quad\frac{\partial L}{\partial\dot\rho}=m\dot\rho\quad\Rightarrow\quad\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\rho}\right)=m\ddot\rho$$

ومنها نجد أن:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\rho}\right)-\frac{\partial L}{\partial\rho}=0\quad\Rightarrow\quad m(\ddot\rho-\rho\dot\phi^2)=-\frac{\partial V}{\partial\rho}\qquad(1)$$

❖ المعادلة الثانية وليكن لها الإحداثي المعمم الأول هو: ϕ

$$\frac{\partial L}{\partial \phi}=0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}=m(\rho^2\dot{\phi}) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}})=\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\phi})$$

ومنها نجد أن:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}})-\frac{\partial L}{\partial \phi}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\phi})=-\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

❖ المعادلة الثالثة وليكن لها الإحداثي المعمم الأول هو: **Z**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right)-\frac{\partial L}{\partial z}=0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z})=-\frac{\partial V}{\partial z}$$

جـ- وإذا كان الجسيم يتحرك في المستوي xy وإذا كانت دالة الجهد تعتمد فقط على البعد عن نقطة الأصل، فانه في هذه الحالة V تعتمد فقط على ρ (z=0) عندئذ تصبح معادلات لاجرانج السابقة على الصورة:

$$m(\ddot{\rho}-\dot{\rho}\phi^2)=-\frac{\partial V}{\partial \rho}, \quad \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi})=0$$

وهاتان هما معادلتا الحركة في مجال قوة مركزية.

مثال ١٣:

جسيم كتلته m يتحرك تحت تأثير قوة جذب مركزي $\mu\, m/r^2$ أوجد باستخدام معادلات لاجرانج معادلات الحركة للجسيم.

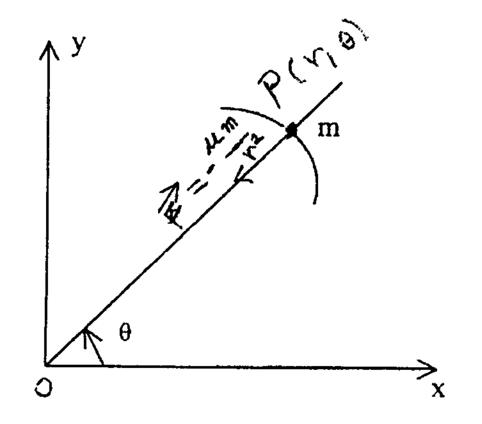
الحل

في الإحداثيات القطبية يكون لدينا احداثيان معممان هما: $q_1=r, q_2=\theta$

بفرض أن الجسيم في وضع عام عند النقطة (r,θ) وسرعته عند هذه اللحظة هي $(\dot{r}, r\dot{\theta})$ وتكون طاقة الحركة الجسيم هي:

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\,\dot{\theta}^2)$$

شكل (٢- ٨)



وطاقة وضعه تصبح: $V = V(r)$
إذن دالة لاجرانج يمكن أن تكتب على الصورة التالية:

$$\therefore\ L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r)$$

ومنها نجد أن:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad , \frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \quad , \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

معادلات لاجرانج ستكون

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad , i = 1, 2$$

$$m\ddot{r} = m r \dot{\theta}^2 + f(r) \ , \ \frac{d}{dt}\left(m r^2 \dot{\theta}\right) = 0$$

$$m\ddot{r} = m r \dot{\theta}^2 + \left(-\frac{\mu m}{r^2}\right) \quad , \ m r^2 \dot{\theta} = const = h$$

حيث أن Q_r ، Q_θ يمكن إيجادهما كالآتي :

$$\vec{F} = -\mu m/r^2\, \vec{e}_r \quad , \ \vec{r} = r\, \vec{e}_r$$

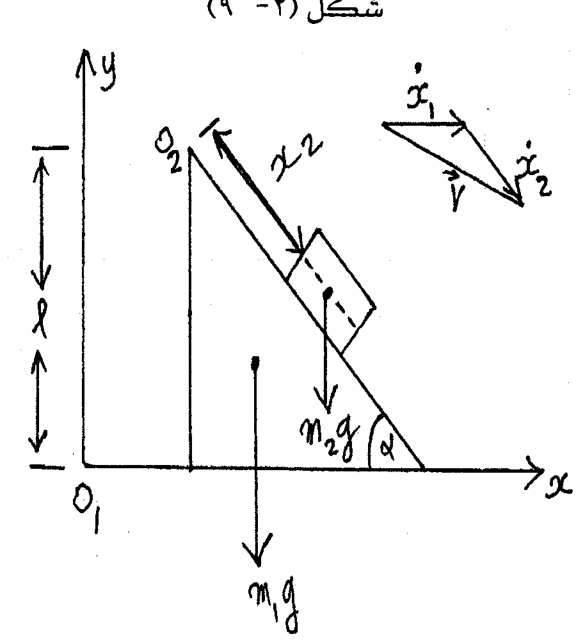
$$\delta W = \vec{F} . \delta\vec{r} = \frac{-\mu m}{r^2} \delta r \quad , \ Q_r = \frac{-\mu m}{r^2} \quad , Q_\theta = 0$$

مثال ١٤:

جسيم كتلته m قابلة للانزلاق على مستوى مائل أملس كتلته m_2 ينزلق هذا المستوى المائل على سطح أفقي أملس كما بشكل (٢- ٩). أوجد معادلات حركة الجسيم والمستوى المائل.

الحل

شكل (٢- ٩)



المجموعة لها درجتان حرية x_1, x_2 نفرض أن (x, y) الموضع العام للكتلة m_2 وأن x_1, x_2 هما أبعاد m_1, m_2 عن o_1, o_2 ومن ثم تكون سرعاتهما $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ وبالتالي:

$$x = x_1 + x_2 \cos\alpha, \quad y = \ell - x_2 \sin\alpha \tag{1}$$

$$\dot{x} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \cos\alpha, \quad \dot{y} = -\dot{x}_2 \sin\alpha \tag{2}$$

$$v^2 = x_1^2 + x_2^2 \cos^2\alpha + 2\dot{x}_1 \dot{x}_2 \cos\alpha + x_2^2 \sin\alpha \tag{3}$$

$$T = \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}_1^2) + \frac{1}{2} m_2(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1 \dot{x}_2 \cos\alpha) \tag{4}$$

دالة الجهد للكتلة m_2 فقط وتساوي: $V = -m_2 g x_2 \sin\alpha + c$

بوضع $c = 0$ فإن دالة لاجرانج تصبح: $L = T - V$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1 \dot{x}_2 \cos\alpha) + m_2 g x_2 \sin\alpha + c \tag{5}$$

معادلات لاجرانج (الإحداثيات x_1, x_2)هي :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \left(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 \cos\alpha\right) = 0$$

(7)

$$m_2\left(\ddot{x}_1 \cos\alpha + \ddot{x}_2\right) - m g \sin\alpha = 0$$

بحل المعادلتين نحصل على

$$\ddot{x}_2 = (g \sin\alpha)/[1 - (\frac{m_2 \cos^2\alpha}{m_1 + m_2})],$$

$$\ddot{x}_1 = -(- g \sin\alpha \cos\alpha) /(\frac{m_1 + m_2}{m_2} - \sin^2\alpha)$$

$\ddot{x}_1$ إشارتها سالبة، $\ddot{x}_2$ موجبة وبإعطاء الشروط الابتدائية فإنه يمكن تكامل هذه المعادلات للحصول على السرعات والإزاحات للمجموعة.

معادلة السرعة للكتلة m_2 يمكن الحصول عليها من $\vec{v} = \vec{\dot{x}}_1 + \vec{\dot{x}}_2$

من المثلث الاتجاهي يكون: $v^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\,\dot{x}_1\,\dot{x}_2 \cos\alpha$

طاقة الحركة للمجموعة تصبح: $T = \frac{1}{2} m_1\,\dot{x}_1 + \frac{1}{2} m\,v^2$

مثال ١٥:

خرزة كتلتها m تنزلق على سلك دائري أملس نصف قطره a فإذا كان السلك يدور عكس عقارب الساعة في مستوى أفقي بسرعة زاوية ω حول محور عمودي على المستوى ماراً بنقطة o على محيطه.

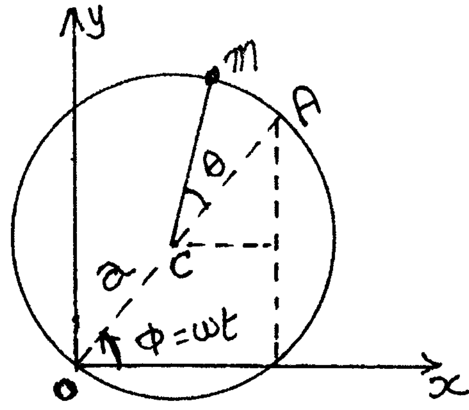
(أ) أدرس حركة الخرزة (ب) أوجد رد فعل السلك على الخرزة.

الحـل

C مركز السلك والقطر oA يدور بزاوية ϕ حيث أن المسافة الزاوية هي $\omega t=$ فإذا كانت الخرزة تصنع زاوية θ مع القطر oA

(أ) لدراسة حركة الخرزة نلاحظ أنه يوجد لها درجة حرية واحدة $q_1=\theta$ فيمكن كتابة الإحداثيات الكرتيزية للخرزة بدلالة الإحداثي المعمم θ :

شكل (٢- ١٠)



$$x=a\cos\omega t+a\cos(\omega t+\theta) \quad (1)$$
$$y=a\sin\omega t+a\sin(\omega t+\theta) \quad (2)$$
$$\dot{x}=-a\sin\omega t-a\left(\sin(\omega t+\theta)\right)\left(\omega+\dot{\theta}\right) \quad (3)$$
$$\dot{y}=a\,\omega\cos\omega t+a\left(\omega+\dot{\theta}\right)\cos(\omega t+\theta) \quad (4)$$

طاقة الحركة
$$T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$
$$\therefore T=\frac{1}{2}m\,a^2[\omega^2+\left(\dot{\theta}+\omega\right)^2+2\,\omega\left(\dot{\theta}+\omega\right)\cos\theta]$$
$$\therefore \frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=m\,a^2\left(\dot{\theta}+\omega+\omega\cos\theta\right) \quad (5)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right)=m\,a^2\left(\ddot{\theta}-\omega\dot{\theta}\sin\theta\right) \quad (6)$$
$$\frac{\partial T}{\partial\theta}=-m\,a^2\left(\dot{\theta}+\omega\right)\sin\theta, \quad \because Q_1=0$$

فتكون معادلات لاجرانج: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_1}=Q_1 \quad ,i=1,2$

$$m\,a^2\left(\ddot{\theta}-\omega\dot{\theta}\sin\theta\right)+m\,a^2\omega\left(\theta+\omega\right)\sin\theta=0$$

ومنها نجد أن

$$\ddot{\theta}+\omega^2 \sin\theta=0 \qquad (8)$$

وهذه تمثل حركة توافقية بسيطة ومحور الدوران هو oA. ويمكن حل المعادلة (8) لإيجاد السرعة والموضع.

(ب) لإيجاد رد فعل السلك على الخرزة

تعتبر أن هناك إزاحة افتراضية صغيرة في اتجاه CB الذي يساوي r ولذلك سيوجد درجتان حرية r,θ (لأن r أصبح متغير) حيث أن القوة في اتجاه r هي $Q_r = R$

من الشكل نجد أن:

$$x = a\cos\omega t + r\cos(\omega t+\theta)$$
$$y = a\sin\omega t + r\sin(\omega t+\theta)$$
$$\dot{x} = -a\omega\sin\omega t + \dot{r}\cos(\omega t+\theta) - r(\omega+\dot{\theta})\sin(\omega t+\theta)$$
$$\dot{y} = \omega a\cos\omega t + \dot{r}\sin(\omega t+\theta) + r(\omega+\dot{\theta})\cos(\omega t+\theta)$$
$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$
$$\therefore T=\frac{1}{2}m[a^2\omega^2+\dot{r}^2+r^2\left(\dot{\theta}+\omega\right)^2+2a\omega\dot{r}\sin\theta$$
$$+2a\omega r(\dot{\theta}+\omega)\cos\theta] \qquad (9)$$

معادلة لاجرانج

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial T}{\partial r}=Q_r \qquad (10)$$

حساب $\frac{\partial T}{\partial r}$ ، $\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}$ ثم التعويض في (5) بعد وضع $Q_r = R$ نحصل على

$$R=m\left[\ddot{r}+a\omega\dot{\theta}\cos\theta-r\left(\dot{\theta}+\omega\right)^2-r\left(\dot{\theta}+\omega\right)^2-a\omega\left(\dot{\theta}+\omega\right)\cos\theta\right] \qquad (11)$$

والآن يمكننا بالنسبة للإزاحة نعود ونهملها أي أن $r=a,\dot{r}=0,\ddot{r}=0$ فنحصل على

$$R=-ma[\omega^2\cos\theta+(\omega+\dot{\theta})^2]$$

هذا هو رد فعل السلك على الخرزة وهو في اتجاه نصف القطر للداخل.

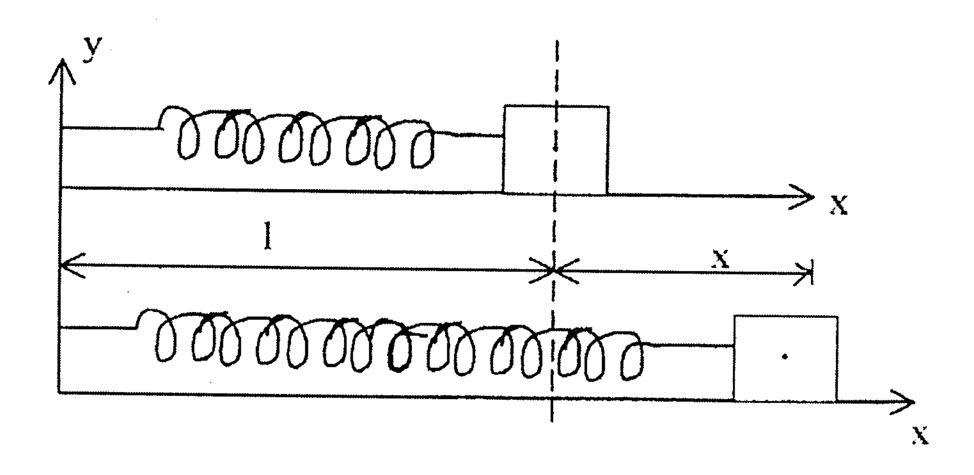
ثانيا: تطبيقات على استخدام معادلات لاجرانج

أولا: المتذبذب التوافقي البسيط:

الكتلة m موضوعة على منضدة أفقية ملساء ممثلة بالمحور x وهى مثبتة في إحدى طرفي زنبرك، بينما طرف الزنبرك الآخر مثبت عند نقطة B.

الطول الطبيعي للزنبرك هو ℓ وكتلته يمكن إهمالها إذا ازيحت الكتلة m على طول المحور x ثم تركت فإنها سوف تهتز أو تتذبذب إلى الأمام وإلى الخلف حول موضع الاتزان o.

شكل (٢- ١١)



❖ إيجاد معادلة الحركة:

عند اللحظة التي يكون فيها طول الزنبرك $\ell + x$ (شكل ب) توجد قوة تحاول إرجاع الكتلة m إلى موضع اتزانها. وحسب قانون "هوك" تسمى هذه القوة "قوة الاسترداد" وتتناسب مع الاستطالة x وتعطى من:

$$\vec{F} = -k\,x\,\vec{i} \qquad (1)$$

حيث k ثابت التناسب، $\vec{i}$ متجه الوحدة في الاتجاه الموجب لمحور x.

باستخدام القانون الثاني لنيوتن يكون لدينا:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} = -k\,x\,\vec{i}$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$m\ddot{x} + k\,x = 0 \qquad (2)$$

هذه المنظومة الاهتزازية تسمى "المتذبذب التوافقي البسيط" أو المتذبذب التوافقي الخطى ويطلق على هذا النوع من الحركة بالحركة التوافقية البسيطة.

❖ السعة والزمن الدوري والتردد:

يمكن حل المعادلة التفاضلية (٢) والحصول على x كدالة في الزمن وتعيين الثوابت بمعرفة الشروط الابتدائية.

فإذا كانت هذه الشروط على سبيل المثال على الصورة:

عندما $t = 0$ فإن: $\frac{dx}{dt} = 0$, $x = A$

فنجد أن حل المعادلة (٢) يصبح:

$$x = A\cos\omega t, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (3)$$

حيث A هو سعة الحركة وهو المسافة التي تكون أكبر إزاحة من موضع الاتزان. والزمن الدوري للحركة هو زمن ذبذبة كاملة وهو يعطى من:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (4)$$

والتردد هو عدد الذبذبات أو الدورات الكاملة في وحدة الزمن ويرمز لـــه بالرمز ν ويعطى من:

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (5)$$

وفى الحالة العامة يكون الحل العام للمعادلة (٢) هو:

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \qquad (6)$$

وهذا الحل يمكن كتابته على الصورة:

$$x = c\cos(\omega t - \phi) \qquad (7)$$

حيث: $c = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \phi = \tan^{-1}\dfrac{B}{A} \quad , \quad \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

والسعة في هذه الحالة هي c بينما يبقى الزمن الدوري كما هو في (٤) والتردد كما هو في (٥) أي أنهما لا يتأثران بالتغير في الشروط الابتدائية.

ϕتسمى زاوية الطور وتختار بحيث $0 \le \phi \le \pi$ وإذا كانت $\phi = 0$ فإن المعادلة (٧) تتحول إلى (٣).

❖ طاقة المتذبذب التوافقي البسيط:

إذا كانت T هي طاقة الحركة، V هي طاقة الجهد، E هي الطاقة الكلية للمتذبذب التوافقي البسيط فإنه يكون:

$$E = T + V \qquad (1)$$

ويمكن توضيح ذلك كالتالي، المعادلة التفاضلية لحركة المتذبذب التوافقي البسيط هي:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x \qquad (2)$$

وحيث أن: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = v\dfrac{dv}{dx}$ فإن (٢) تصبح:

$$mv\frac{dv}{dx} = -k\,x \qquad (3)$$

بفصل المتغيرات ثم التكامل نجد أن :

$$\int mv\,dv = -k\int x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}k\,x^2 + c$$

ومنها نجد أن: $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\,x^2 = c$

مثال١٦:

أ- أثبت أن القوة $\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$ التي تؤثر على المتذبذب التوافقي البسيط تكون محافظة ثم أوجد طاقة الجهد له. ب- أوجد دالة لاجرانج ومعادلة الحركة.

الحل

$\vec{F}$ تكون محافظة إذا كان $\operatorname{curl}\vec{F} = \vec{o}$ أي أن:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -kx & o & o \end{vmatrix} = \vec{o}$$

إذا $\vec{F}$ محافظة وطاقة الجهد تعطى من:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\,V \Rightarrow -k\,x\,\vec{i} = -(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial x} = kx$$

ومن هذا ينتج أن: $V = \frac{1}{2}k\,x^2 + c$

وبفرض أن: $V = 0$ عندما $x = 0$ فنجد أن $c = 0$ وينتج أن $V = \frac{1}{2}kx^2$

❖ *طريقة أخرى لإيجاد طاقة الجهد للمتذبذب التوافقي:*

$V = -$ (الشغل المبذول)

$$V = -\int \vec{F}.\vec{d}x = -\int\left[\left(-kx\,\vec{i}\right)dx\,\vec{i}\right] = \int k\,x\,dx = \frac{1}{2}k\,x^2 + c$$

حيث c ثابت التكامل ويمكن تعيينه من الشروط كما سبق فيكون: $V = \frac{1}{2}k\,x^2$

ب- إذا رمزنا لإزاحة الكتلة من موضع الاتزان بالرمز x وكذلك نفرض أن الإحداثي المعمم هو $q = x$

وعلى ذلك تصبح طاقة الحركة على الصورة التالية: $T = \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2$

وطاقة الموضع (تم إيجادها من قبل) هي: $V = -\frac{1}{2}k\,x^2$

ودالة لاجرانج تصبح: $L = T - V$

$$\therefore L = \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k\,x^2$$

معادلة لاجرانج:
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\,\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = k\,x$$

إذا معادلة الحركة تصبح: $m\,\ddot{x} + k\,x = 0$ أو $m\,\ddot{x} = -k\,x$

وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة. ينطبق عليها كل ما قيل عنها من قبل من حل وتتردد وزمن دوري.

ثانيا: مجموعات الجسيمات المهتزة Vibrating Systems

الترددات العادية والنسق العادي للتردد

إذا وصل جسيما (أو أكثر) بواسطة زنبرك (أو تبادلا التأثير بأي طريقة مكافئة) فإنهما سوف يتذبذبان أو يهتزان بالنسبة لبعضهما.

وكما نعلم أن الجسيم المهتز أو المتذبذب، مثل المتذبذب التوافقي البسيط أو ثقل البندول البسيط يكون له تردد واحد للتذبذب. أما في حالة مجموعات الجسيمات،

فيوجد بصفة عامة أكثر من تردد للتذبذب. مثل هذه الترددات تسمى (الترددات العالية)، وحركات الجسيمات في هذه الأحوال تسمى أحيانا (الاهتزازات الدورية المتعددة).

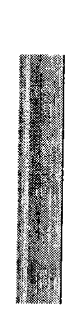
(نمط) نسق الاهتزاز (أي الطريقة الخاصة التي يحدث بها الاهتزاز، نتيجة شروط ابتدائية خاصة مثلا) الذي يوجد فيه فقط أحد الترددات العادية يسمى " النسق العادي للاهتزاز" أو للتبسيط "النسق العادي". (النمط) النسق العادي للاهتزاز - حالة التذبذب الأساسية Normal mode of vibration.

مثال١٧: (الحل باستخدام طريقة الميكانيكا الكلاسيكية)

وصلت كتلتان متساويتا الكتلة m بثلاث أسلاك زنبركيه، لها نفس ثابت الزنبرك k كما هو موضح بالشكل (٢- ١٢) بحيث تزلق كل كتلة بحرية على منضدة ملساء AB. حائطا اتصال الزنبركين عند A, B مثبتان أوجد المعادلات التفاضلية لحركة الكتلتين. وتسمى هـذه المنظومة بالمتذبذبات التوافقيان المزدوجان:

الحـل

شكل (٢- ١٢)



نفرض أن $x_2 \vec{i}, x_1 \vec{i}$ شكل (٢- ١٣) يرمزان إلى إزاحتي الكتلتين عن موضعي اتزانهما D,C عند أي لحظة t.

القوى المؤثرة على الكتلة الأولى عند P هي:

(i) قوة نتيجة للزنبرك إلى اليمين تعطى من: $k(x_2 - x_1)\vec{i}$

(ii) قوة نتيجة للزنبرك إلى اليسار تعطى من: $-k x_1 \vec{i}$

وبذلك تكون القوة الكلية المؤثرة على الكتلة الأولى عند P هي:

$$k(x_2 - x_1)\,\vec{i} - k\,x_1\,\vec{i} = k(x_2 - 2x_1)\vec{i}$$

بنفس الطريقة تكون القوى الكلية المؤثرة على الكتلة الثانية عن D هي:

$$k(x_1 - x_2)\,\vec{i} - k\,x_2\,\vec{i}$$

عندئذ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن يكون لدينا:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2}{dt^2}(x_1\vec{i}) &= k(x_2 - x_1)\,\vec{i} - k\,x_1\,\vec{i} \\ m\frac{d^2}{dt^2}(x_2\vec{i}) &= k(x_1 - x_2)\,\vec{i} - k\,x_2\,\vec{i} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

أو:

$$\left.\begin{aligned} m\,\ddot{x}_1 &= k(x_2 - 2x_1) \\ m\,\ddot{x}_2 &= k(x_1 - x_2) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

وهذه هي معادلة الحركة.

مثال ١٨:

المطلوب حل المثال السابق ولكن بطريقة معادلات لاجرانج. ثم أوجد الترددات العادية ثم أوجد النسق العادي للتردد.

الحل

إذا رمزنا لإزاحة الكرة الأولى من موقع الاتزان بالرمز x_1 وللكرة الثانية بالرمز x_2 فإن التغيرات في طول الأسلاك الثلاثة هي:

$$x_1, \quad x_2 - x_1, \quad -x_2$$

إن طاقة الجهد لسلك مثال (السلك الذي يخضع لقانون هوك) يساوى $\frac{1}{2}k\,x^2$. وعندئذ يمكن كتابة طاقة الموضع (أو الجهد) للنظام الحالي كالآتي:

$$V=\frac{1}{2}k\,x_1^2+\frac{1}{2}(k)\,(x_2-x_1)^2+\frac{1}{2}k(-x_2^2)^2$$
$$=\frac{1}{2}k\,x_1^2+\frac{1}{2}k\,x_2^2-k\,x_1\,x_2+\frac{1}{2}k\,x_1^2+\frac{1}{2}k\,x_2^2$$
$$=-k\,x_1\,x_2+k\,x_1^2+k\,x_2^2$$
$$T=\frac{1}{2}m\,\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\,\dot{x}_2^2$$

والآن يمكن حساب دالة لاجرانج ومعادلات لاجرانج كالتالي:

$$L=T-V$$
$$=\frac{1}{2}m\,\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\,\dot{x}_2^2+k\,x_1\,x_2-k\,x_1^2-k\,x_{2}^{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}=m\,\dot{x}_1,\quad \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1})=m\,\ddot{x}_1,\quad \frac{\partial L}{\partial x_1}=k\,x_2-2\,k\,x_1$$
$$,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}=m\,\dot{x}_2,\quad \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2})=m\,\ddot{x}_2,\quad \frac{\partial L}{\partial x_1}=k\,x_2-2\,k\,x_1$$
$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k})-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0$$
$$m\,\ddot{x}_1=k(x_2-2\,x_1)\quad,\qquad m\,\ddot{x}_2=k(x_1-2\,x_2)$$

وهاتان هما معادلتي الحركة.

(ii) إيجاد التردد العادي:

في المعادلتين (١)، (٢) نعتبر أن:

$$x_1=A_1\,\cos\omega t,\quad x_2=A_2\,\cos\omega t$$

عندئذ بعد الاختصار يكون لدينا:

$$(2k-m\,\omega^2)\,A_1-k\,A_2=0 \qquad (3)$$
$$-k\,A_1+(2k-m\,\omega^2)\,A_2=0 \qquad (4)$$

والآن إذا كان كل من A_2, A_1 لا يساوى الصفر فيجب أن يكون لدينا:

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

يسمى هذا المحدد بالمحدد المميز - معادلة التردد أو:

$$(2k - m\,\omega^2)^2 - k^2 = 0$$

$$m^2\,\omega^4 - 4\,k\,m\,\omega^2 + 3\,k^2 = 0$$

وبالحل بالنسبة إلى ω^2 نجد أن:

$$\omega^2 = (4\,k\,m \pm \sqrt{16\,k^2m^2 - 12k^2m^2})/(2m^2)$$

وهذا يعطى: $\omega^2 = (3k)/m, \;\; \omega^2 = k/m$

وعلى ذلك يكون الترددان العاديان (أو الطبيعيان) للمجموعة هما:

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{(3k)/m}, \;\; \nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}$$

الترددات العادية تسمى أيضا الترددات المميزة والمحدد (٥) يسمى المحدد المميز أو (معادلة التردد).

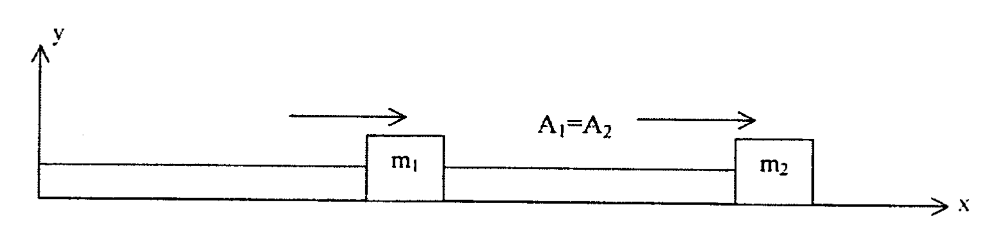
(iii) لإيجاد النسق العادي المناظر لـ $\omega = \sqrt{k/m}$ نعتبر أن: $\omega^2 = k/m$ في المعادلتين (٤)، (٢) عندئذ نجد أن: $A_1 = A_2$

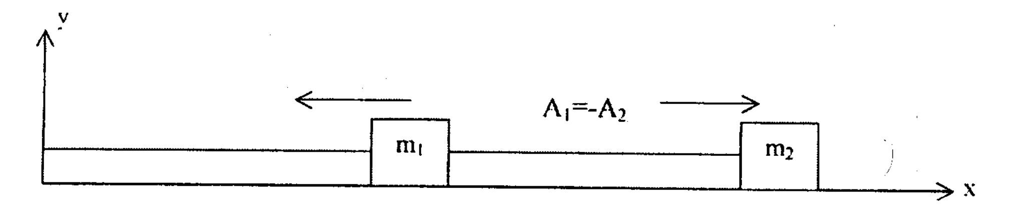
والنسق العادي للتذبذب في هذه الحالة يناظر حركة الكتلتين في نفس الاتجاه (كلاهما إلى اليمين أو كلاهما إلى اليسار) شكل (٢- ١١).

وبالمثل لإيجاد النسق العادي الذي يناظر $\omega = \sqrt{(3k/m)}$ نعوض بـ $\omega^2 = (3k)/m$ في المعادلتين (٣)، (٤) فنجد أن: $A_1 = -A_2$

والنسق العادي للمتذبذب في هذه الحالة يناظر حركة الكتلتين فى اتجاهين متضادين (أي عندما تحرك إحدى الكتلتين إلى اليمين تتحرك والأخرى إلى اليسار والعكس بالعكس).

(٢- ١٣)





ملاحظة:

عند دراسة هذه المسألة يمكننا أيضا إيجاد الحلول:

$$x_1 = B_1 \sin \omega t \quad , \quad x_2 = B_2 \sin \omega t$$

أو: $x_1 = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t, \quad x_2 = A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t$

أو: $x_1 = c_1 \, e^{i\omega t} \quad , \quad x_2 = c_2 \, e^{i\omega t}$

ثالثا: معادلات لاجرانج للمجموعات غير تامة التقييد

Lagrange's Equations for Non-Holonomic systems

افترض وجود m معادلة تقييد على الصورة:

$$\sum_\alpha A_\alpha dq_\alpha + Adt = 0, \quad \sum_\alpha B_\alpha dq_\alpha + Bdt = 0,.... \qquad (1)$$

أو بصورة مكافئة:

$$\sum_\alpha A_\alpha \dot{q}_\alpha + A = 0, \quad \sum_\alpha B_\alpha \dot{q}_\alpha + B = 0,.... \qquad (2)$$

يجب بالطبع أن يكون لدينا $m<n$ حيث n هو عدد الإحداثيات q_α.

المعادلات (١)،(٢) قد يمكن أو لا يمكن تكاملها للحصول على علاقة تشمل على جميع q_α . إذا كان لا يمكن تكاملها فإن القيود تكون غير تامة أو غير ممكنة التكامل وإلا فإنها تكون تامة أو ممكنة التكامل. على أي حال فغن معادلات لاجرانج يمكن استبدالها

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=\phi_\alpha+\lambda_1 A_\alpha+\lambda_2 B_\alpha+\ldots\ldots \qquad (3)$$

حيث تسمى البارامترات λ_2,λ_1 "مضاعفات لاجرانج". إذا كانت القوي محافظة فإن (٣) يمكن كتابتها بدلالة دالة لاجرانج $L = T - V$ على الصورة:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=\lambda_1 A_\alpha+\lambda_2 B_\alpha+\ldots \qquad (4)$$

يجب أن نوضح أن النتائج السابقة يمكن تطبيقها على المجموعات نامة التقييد (سواء بسواء مثل المجموعات غير تامة التقييد)، حيث أن شرط التقييد يمكن بعد التفاضل تحويله على الصورة:

$$\phi(q_1,q_2,\ldots\ldots,q_n,t)=0 \qquad (5)$$

على الصورة:

$$\sum_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial q_\alpha}dq_\alpha+\frac{\partial \phi}{\partial t}dt=0 \qquad (6)$$

التي هي نفسها صورة (١) لمعادلات لاجرانج:

مثال ١:

استنتج معادلات لاجرانج الغير تامة التقييد التي لها الصورة التالية:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=\phi_\alpha+\lambda_1 A_\alpha+\lambda_2 B_\alpha+\ldots.$ للقيود الغير تامة.

الحل

افترض وجود m شرطا مقيدا على الصورة:

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha} dq_{\alpha} + Adt = 0, \quad \sum_{\alpha} B_{\alpha} dq_{\alpha} + Bdt = 0, ... \qquad (1)$$

حيث m<n عدد الإحداثيات q_{α}.

وكما في المثال (٥) في معادلات لاجرانج لدينا:

$$Y_{\alpha} \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} = \sum_{v} m_v \ddot{r}_v . \frac{dr_v}{\partial q_{\alpha}} \qquad (2)$$

إذا كانت δr_v هي الإزاحات الافتراضية التي تحقق القيود للحظية (الناتجة باعتبار الزمن t ثابتا) فإن:

$$\delta r_v = \sum_{\alpha} \frac{\partial r_v}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} \qquad (3)$$

والآن الشغل الافتراضي هو:

$$\delta W = \sum_{v} m_v \ddot{r}_v . \delta r_v = \sum_{v} \sum_{\alpha} m_v \ddot{r}_v . \frac{\partial r_v}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} = \sum_{\alpha} Y_{\alpha} \delta q_{\alpha} \qquad (4)$$

وحيث أن الشغل الافتراضي يمكن كتابته بدلالة القوي المعممة ϕ_{α} على الصورة:

$$\delta W = \sum_{\alpha} \phi_{\alpha} \delta q_{\alpha} \qquad (5)$$

فإنه بالطرح بين (٤)، (٥) يكون لدينا:

$$\sum_{\alpha} (Y_{\alpha} - \phi_{\alpha}) \delta q_{\alpha} = 0 \qquad (6)$$

وحيث أن δq_{α} ليست جميعها مستقلة فإنه لا يمكننا استنتاج أن $Y_{\alpha} = \phi_{\alpha}$ التي ستؤدى إلى معادلات لاجرانج.

من (١) حيث أن الزمن t ثابت للقيود اللحظية فإنه يكون لدينا m معادلة على الصورة:

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha}\delta q_{\alpha} = 0, \quad \sum_{\alpha} B_{\alpha}\delta q_{\alpha} = 0,.. \qquad (7)$$

وبالضرب في مضاعفات لاجرانج $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ثم بالجمع يكون لدينا:

$$\sum_{\alpha}(\lambda_1 A_{\alpha} + \lambda_2 B_{\alpha} + \ldots)\delta q_{\alpha} = 0 \qquad (8)$$

بالطرح بين (٦)، (٧) نحصل على:

$$\sum_{\alpha}(Y_{\alpha} - \phi_{\alpha} - \lambda_1 A_{\alpha} - \lambda_2 B_{\alpha} - \ldots)\delta q_{\alpha} = 0 \qquad (9)$$

والآن بسبب المعادلات (٧) يمكن الحل لعدد m من الكميات δq_{α} مثل $(\delta q_1, \ldots, \delta q_m)$ بدلالة δq_{α} الباقية أي m−n مثل $(\delta q_{m+1}, \ldots, \delta q_n)$ بناء على ذلك فإنه في (٩) يمكن اعتبار $(\delta q_1, \ldots, \delta q_m)$ غير مستقلة و $(\delta q_{m+1}, \ldots, \delta q_n)$ مستقلة.

واختياريا سوف نجعل معاملات المتغيرات الغير مستقلة تساوى صفرا أي أن:

$$Y_{\alpha} - \phi_{\alpha} - \lambda_1 A_{\alpha} - \lambda_2 B_{\alpha} - \ldots = 0 \quad \alpha = 1,2,\ldots, m \qquad (10)$$

وبذلك سوف يبقي في المجموع (٩) فقط الكميات المستقلة δq_{α} وبما أن هذه الكميات اختيارية فينتج أن معاملاتها تساوى صفرا أي أن:

$$Y_{\alpha} - \phi_{\alpha} - \lambda_1 A_{\alpha} - \lambda_2 B_{\alpha} - \ldots = 0 \quad \alpha = m+1,\ldots, n \qquad (11)$$

ونحصل من المعادلات (٢)، (١٠)، (١١) على:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} = \phi_{\alpha} + \lambda_1 A_{\alpha} + \lambda_2 B_{\alpha} + \ldots \quad \alpha = 1,2,\ldots, n \qquad (12)$$

كما هو مطلوب. هذه المعادلات مع (١) تعطي n+m معادلة بها n+m مجهول

رابعا: معادلات لاجرانج والقوى الدفعية

نعلم أن القوة الدفعية هي قوة كبيرة مؤثرة لفترة زمنية صغيرة. فإذا فرضنا أنه في زمن Δt مطلوب إيجاد دفع القوة Q_α.

فمن معادلة لاجرانج بالضرب في dt والتكامل في الفترة $[t, t+\Delta t]$ نحصل على

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) dt - \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right) dt = \int_t^{t+\Delta t} Q_\alpha \, dt$$

التكامل الثاني في الطرف الأيسر يختفي عندما تكون Δt صغيرة جداً ومن ثم تظل $\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}$ محدودة في تلك الفترة والطرف الأيمن التكامل لا يتلاشى حيث أن قوى الدفع كبيرة بالرغم من الفترة القصيرة التي تحث فيها ومن ثم نحصل على :

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right|_{t+\Delta t} - \left.\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right|_t = I$$

وهذا هو نفس المفهوم في قوانين نيوتن حيث أن الدفع واضح أنه يساوي التغير في كمية الحركة أثناء فترة الدفع وعند حساب الدفع سنأخذ في الاعتبار أن هناك قوى لها تغير طفيف يمكن إهمالها مثل القوى المرنة والتصادمات ... وكذلك التغير الطفيف في إحداثيات المجموعة.

مثال ٢:

استنتج معادلات المجموعات المحافظة غير تامة التقييد التي لها الصورة التالية:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \ldots.$$

الحل

من مثال (١) السابق لدينا :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \phi_\alpha + \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \ldots. \qquad (1)$$

وإذا كانت القوي يمكن اشتقاقها من الجهد فإن $\phi_\alpha = -\partial V / \partial q_\alpha$ حيث V لا تعتمد على q_α. وحيث أن دالة لاجرانج لها الصورة: $L = T - V$ وبذلك يمكن كتابة (١) على الصورة:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + ... \qquad (2)$$

مثال ٣:
جسيم كتلته m يتحرك تحت تأثير الجاذبية على السطح الداخل للجسم المكافئ الدوراني $x^2 + y^2 = az$ ،بفرض أن السطح لا احتكاكي احصل على معادلات الحركة.

الحل

شكل (٢- ١٤)

y, m g, o, x

دالة لاجرانج تعطى في الإحداثيات الأسطوانية من العلاقة التالية:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mgz \qquad (1)$$

وحيث أن: $x^2 + y^2 = \rho^2$

فإن شرط التقيد يكون: $\rho^2 - az = 0$ وينتج أن :

$$2\rho\delta\rho - a\delta z = 0 \qquad (2)$$

إذا جعلنا:

$q_1 = \rho, \quad q_2 = \phi, \quad q_3 = z$ وقارنا (٢) بالمعادلات(٧) في المثال السابق نرى أن:

$$A_1 = 2\rho, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -a \qquad (3)$$

حيث أن قيدا واحدا فقط موجود. وبذلك يمكن كتابة معادلات لاجرانج على الصورة:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \lambda_1 A_\alpha \quad \alpha = 1,2,3$$

أي أن:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \rho}=2\lambda_1\rho,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \phi}=0,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right)-\frac{\partial L}{\partial z}=-\lambda_1 a$$

وباستخدام (١) فإن هذه المعادلات تصبح:

$$m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\phi}^2)=2\lambda_1\rho \qquad (4)$$

$$m\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})=0 \qquad (5)$$

$$m\ddot{z}=-mg-\lambda_1 a \qquad (6)$$

وأيضا لدينا شرط التقييد:

$$2\rho\dot{\rho}-a\dot{z}=0 \qquad (7)$$

المعادلات الأربع (٤)، (٥)، (٦)، (٧) تمكننا من إيجاد المجاهيل الأربعة: ρ,ϕ,z,λ_1

مثال ٤:

(أ) أثبت أن الجسيم في المثال (٣) السابق سوف يرسم دائرة أفقية في المستوي $z=h$ إذا أعطي سرعة زاوية مقدارها $\omega=\sqrt{2g/a}$.

(ب) أثبت أنه إذا أزيح هذا الجسيم قليلا عن هذا المسار الدائري فإنه سوف يتذبذب حول المسار بتردد يعطي من: $(1/\pi)\sqrt{2/ga}$.

(جـ) ناقش استقرار الجسيم في المسار الدائري.

الحل

(أ) نصف قطر الدائرة كما نحصل عليه من تقاطع المستوي $z=h$ مع مجسم القطع المكافئ $\rho^2=az$ هو:

$$\rho_\circ=\sqrt{ah} \qquad (1)$$

بوضع $z=h$ في المعادلة (٦) في المثال السابق نجد أن:

$$\lambda_1=-mg/a \qquad (2)$$

عندئذ باستخدام (١)، (٢) في المعادلة (٤) من المثال السابق وبوضع $\omega=\dot{\phi}$ نجد أن:

$m(-\rho_o\omega^2)=22(-mg/a)\rho_o$ ومنها يكون:

$$\omega=\sqrt{2g/a} \qquad (3)$$

الزمن الدوري والتردد على هذا المسار الدائري يعطيان على الترتيب من:

$$\rho_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{a}}, \qquad P_1 = 2\pi\frac{a}{2g} \tag{4}$$

(ب) من المعادلة (٥) في المثال السابق نجد أن:

$$A = \text{ثابت} = \rho^2\dot{\phi} \tag{5}$$

بفرض أن الجسيم يبدأ بسرعة زاوية ω نجد أن: $A = ah\omega$

وينتج أن:

$$\dot{\phi} = ah\omega / \rho^2 \tag{6}$$

وحيث أن التذبذب يحدث بالقرب من المستوي $z = h$ فإننا نجد بوضع $z = h$ في المعادلة (٦) من المثال السابق أن:

$$\lambda_1 = -mg/a \tag{7}$$

باستخدام (٦)، (٧) في المعادلة (٤) من المثال السابق نجد أن:

$$\ddot{\rho} - a^2h^2\omega^2/\rho^3 = -2g\rho/a \tag{8}$$

والآن إذا كان المسار يحيد قليلا عن الدائرة فإن ρ سوف تحيد قليلا عن ρ_o هذا يجعلنا نجري التحويل

$$\rho = \rho_o + u \tag{9}$$

في (٨) حيث u صغيرة بالنسبة إلى ρ_o عندئذ (٨) تصبح:

$$\ddot{u} - \frac{a^2h^2\omega^2}{(\rho_o + u)^3} = -\frac{2g}{a}(\rho_o + u) \tag{10}$$

لكن إلى درجة تقريب عالية لدينا:

$$\frac{1}{(\rho_o+u)^3} = \frac{1}{\rho_o^3(1+u/\rho_o)^3} = \frac{1}{\rho_o^3}\left(1+\frac{u}{\rho_o}\right)^{-3} = \frac{1}{\rho_o^3}\left(1-\frac{3u}{\rho_o}\right)$$

باستخدام نظرية ذات الحدين حيث أننا أهملنا الحدود المشتملة على $u^2, u^3, ...$
وباستخدام قيم ρ_o المعطاة من (١)،(٣) على الترتيب فإن (١٠) تصبح:

$$u + (8g/a)u = 0 \tag{5}$$

وحلها هو:

$$u = \varepsilon_1 \cos\sqrt{8g/a}\,t + \varepsilon_2 \sin\sqrt{8g/a}\,t$$

عندئذ يكون:

$$\rho = \rho_o + u = \sqrt{ha} + \varepsilon_1 \cos\sqrt{8g/a}\,t + \varepsilon_2 \sin\sqrt{8g/a}\,t$$

ينتج من ذلك أنه إذا أزيح الجسيم قليلا عن المسار الدائري الذي نصف قطره $\rho_o = \sqrt{ah}$ فإنه سوف يتذبذب حول المسار بتردد:

$$\rho_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{(8g)/a} = \frac{1}{\pi}\sqrt{(2g)/a} \tag{6}$$

وزمن دوري:

$$p_2 = \pi\sqrt{a/(2g)} \tag{7}$$

لاحظ أن الزمن الدوري للتذبذب في المسار الدائري المعطي من (٤) يكون ضعف الزمن الدوري للتذبذب حول المسار الدائري المعطي من (٧).

(جـ) حيث أن الجسيم يميل إلى أن يعود إلى المسار الدائري عندما يزاح قليلا عنه فإن الحركة تكون مستقرة.

مثال ٥:
ناقش المعني الفيزيائي لمضاعفات لاجرانج $\lambda_1, \lambda_2, ...$ في المثال (٣) من الشغل وطاقة الحركة والقوي المعممة.

الحـل

في حالة عدم وجود قيود على الحركة فإنه باستخدام المثال (٥) في معادلات لاجرانج تكون معادلات الحركة هي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=\phi_\alpha$$

وفي حالة وجود قيود على الحركة فإنه باستخدام المثال (١) من معادلات لاجرانج للمجموعات الغير تامة التقييد تكون معادلات الحركة هي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=\phi_\alpha+\lambda_1 A_\alpha+\lambda_2 B_\alpha+....$$

وينتج أن الحدود: $\lambda_1 A_\alpha+\lambda_2 B_\alpha+....$

تناظر القوي المعممة المصاحبة للقيود فيزيائيا وتكون مضاعفات لاجرانج مصاحبة للقوى المقيدة التي تؤثر على المجموعة وبذلك فإنه عند تعيين مضاعفات لاجرانج يلزم اعتبار تأثير القوى المقيدة بدون إيجادها صراحة.

مثال ٦ :

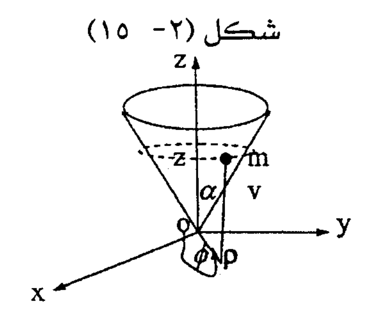
يتحرك جسيم كتلته m على السطح الداخلي لمخروط دائري قائم (رأسه لأسفل) ونصف زاوية رأسه α تحت تأثير الجاذبية فقط. صف حركة الجسيم ؟

الحـل

بأخذ الجسيم في وضع عام يتحدد بدلالة الإحداثيات (ρ,ϕ,z) كإحداثيات معممة ويلاحظ أن:

$$z=\rho\cot\alpha \qquad (1)$$

شكل (٢- ١٥)



أي z,ρ لا يكونان مستقلان وبالتالي فإن (1) هي معادلة القيد والتي تخفض درجات الحرية من ثلاثة إلى اثنين ρ,ϕ (وسوف تحذف z).

باستخدام معادلة القيد، طاقة الحركة للجسيم m هي :

$$T=\frac{1}{2}mV^2=\frac{1}{2}m\left[\rho^2+\rho^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2\right]$$
$$T=\frac{1}{2}m\left[\dot{\rho}^2\operatorname{cosec}^2\alpha+\rho^2\dot{\phi}^2\right]$$

طاقة الجهد ستكون: $V=mgz=mg\rho\cot\alpha$

دالة لاجرانج تصبح:

$$\therefore\ L=T-V=\frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2\operatorname{cosec}^2\alpha+\rho^2\dot{\phi}^2\right)-mg\rho\cot\alpha$$

نوجد:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\rho}}=m\dot{\rho}\operatorname{cosec}^2\alpha\ ,\frac{\partial L}{\partial\rho}=m\rho\dot{\phi}^2-mg\cot\alpha$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\rho}}\right)=m\ddot{\rho}\operatorname{cosec}^2\alpha\ ,\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}=m\rho^2\dot{\phi},\quad\frac{\partial L}{\partial\phi}=0$$

بالتعويض في معادلة لاجرانج

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\quad i=1,2,\ q_1=\rho,q_2=\phi$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\rho}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\rho}=\ddot{\rho}-\rho\dot{\phi}^2\sin\alpha+g\cos\alpha\sin\alpha=0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\phi}=\frac{d}{dt}\left(m\rho^2\dot{\phi}\right)=0\Rightarrow m\rho^2\dot{\phi}=\cos t$$

والمعادلة الأخيرة تمثل العزم الزاوي حول المحور z وهي تمثل قانون ثبوت العزم الزاوي حول محور التماثل في مجال الجاذبية.

تمارين

١- أ) أوجد دالة لاجرانج لجسيم كتلته m يسقط بحرية في مجال جاذبية منتظم.
ب) أكتب معدلات لاجرانج.

٢- أعد حل المسألة السابقة بالنسبة لمجال قوة جاذبية تتغير عكسيا مع مربع البعد عن نقطة مثبتة 0 بفرض أن الجسيم يتحرك في خط مستقيم خلال 0.

٣- استخدم معادلات لاجرانج لتصف حركة جسيم كتلته m إلى أسفل مستوي مائل لا احتكاكي زاويته α.

٤- استخدم معادلات لاجرانج في وصف حركة مقذوف أطلق بسرعة $v_\circ$ في اتجاه يصنع زاوية α مع الأفقي.

٥- استخدم معادلات لاجرانج في حل مسألة مذبذب توافي:
أ) ثنائي البعد ب) ثلاثي الأبعاد

٦- جسيم كتلته m متصل بنقطة مثبته P على مستوي أفقي بواسطة خيط طوله l المستوي بدور بسرعة زاوية ثابتة ω حول محور رأسي يمر بنقطة 0 على المستوي، حيث $0p = a$.
أوجد: أ- دالة لاجرانج للمجموعة ب- أكتب معادلات الحركة للجسيم

٧- الإحداثيات المتعامدة (x,y,z) التي تعرف موضع جسيم كتلته m يتحرك في مجال قوة جهد V معطاة بدلالة الإحداثيات الكروية (r, ϕ, θ) بواسطة معادلات التحويل.

$$x = r\sin\phi\cos\theta, \quad y = r\sin\phi\sin\theta, \quad z = r\cos\phi$$

استخدم معادلات لاجرانج في إيجاد معادلات الحركة:

٨- أعد حل المسألة ٧ إذا كان الجسيم لا يتحرك بالضرورة في خط مستقيم يمر خلال o .

٩- إذا تحرك جسيم كتلته m وشحنته e بسرعة $\vec{v}$ في مجال كهربي $\vec{E}$ ومجال مغناطيسي $\vec{B}$ فإن القوة المؤثرة عليه تعطي من: $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$
يمكن التعبير عن المجالين بدلالة الجهد القياسي ϕ والجهد الإتجاهي $\vec{A}$ بالعلاقتين:

$$\vec{E} = -\vec{\Delta}\phi - \partial\vec{A}/\partial t, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

أثبت أن دالة لاجرانج التي تعرف حركة مثل هذا الجسيم هي:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + e(\vec{A}.\vec{v}) - e\phi$$

١٠- أوجد دالة لاجرانج للبندول الثلاثي ثم أوجد معادلات الحركة، ثم احصل علي الترددات العادية للتذبذب والنسق العادي لكل تردد بالنسبة للبندول الثلاثي، كذلك اعتبر انفس المسألة عندما يكون الطولان والكتلتان غير متساويتين.

١١ - زنبرك رأسي ثابتة k وكتلته M . إذا وضعت كتلة m على الزنبرك وتركت لتتحرك فاستخدم معادلات لاجرانج لإثبات أن المجموعة سوف تتحرك حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري $2\pi\sqrt{(M+3\omega)3k}$

١٢- استخدم طريقة معادلات لاجرانج للمجموعات الغير تامة التقيد في حل مسألة جسيم كتلته m ينزلق إلى أسفل على مستوي مائل لا احتكاكيا زاويته α .

١٣- حل المسألة الآتية مستخدما طريقة معادلات لاجرانج للمجموعات الغير تامة التقييد: وضعت كتلتان m_2, m_1 علي مستويين أملسين مائلين بالزاويتين α_2, α_1 على الكتلتين غير مرن ولا وزن له ويمر على مسمار أملس عند A أوجد عجلتي الكتلتين.



معادلات هاملتون

Hamilton's Equations

* مقدمة
* تعريف كمية الحركة المعممة
* تعريف دالة هاملتون
* استنتاج معادلات هاملتون
* أمثلة وتمارين

الفصل الثالث

معادلات هاملتون

Hamilton's Equations

٣-١ مقدمة

معادلات هاملتون للحركة للمجموعة الديناميكية تعتمد على دالة تسمى دالة هاملتون ويرمز لها بالرمز H وهي دالة في الإحداثيات المعممة وكميات الحركة المعممة والزمن ولا تظهر السرعة المعممة $\dot{q}_\alpha$ صراحة فيها. أي

$$H = H(q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_n, t)$$

أي أن

$$H = H(q_\alpha, p_\alpha, t)$$

حيث $p_\alpha = \dfrac{\partial T}{\partial q_\alpha}$ هي كمية الحركة المعممة.

وسنرى كيفية تكوين معادلات هاملتون والتي هي أساس لما يسمى ديناميكا هاملتون Hamilton Dynamics (وهي طريقة لمعالجة الديناميكا التحليلية) التي هي أسهل وأشمل وتتميز عن معادلات لاجرانج بأنها مجموعة من المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والتي عددها 2 n بينما نعلم أن معادلات لاجرانج هي عدد n من المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية هذا وبالنسبة للمجموعات التي تعتمد دالة لاجرانج الخاصة بها صراحة على الزمن فيتبين لنا أن دالة هاملتون تكون ثابت حركة (أي أنها تظل ثابتة أثناء الحركة) في حين لا تكون دالة لاجرانج كذلك. وقبل أن نعرف دالة هاملتون يجب تعريف ما يسمى كمية حركة العموم (أو المعممة) p_α وكذلك كما عرفنا من قبل الإحداثيات المعممة q_α والسرعات المعممة $\dot{q}_\alpha$ والقوى المعممة Q_α.

والاستخدام الأكثر لمعادلات هاملتون يكون في ميكانيكا الكم والميكانيكا الإحصائية.

تعريف كمية الحركة المعممة p_α (الزخم المعمم أو العام):
Generalized Momentum

تعرف كمية الحركة المعممة p_α المصاحبة للإحداثي المعمم q_α بالصيغة التالية

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \qquad (1)$$

وإذا كان النظام محافظا فإن دالة لاجرانج لهذا النظام ستعطى بالمعادلة:

$$L = T - V \qquad (2)$$

وفي هذه الحالة فإن الطاقة الكامنة للنظام (طاقة الجهد) ستعتمد فقط على الإحداثيات المعممة وبالتالي يصبح تعريف p_α بدلالة دالة لاجرانج L بالصيغة التالية:

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \qquad (3)$$

ويجب ملاحظة أن كمية الحركة المعممة تعتمد على : $t, q_\alpha, \dot{q}_\alpha$.
وإذا رجعنا لمعادلات لاجرانج التي كانت على الصورة:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad (4)$$

سنجد أن الحد الأول منها يمثل المعدل الزمني لتغير كمية الحركة المعممة $\frac{d}{dt}(p_\alpha)$ بينما الحد الثاني فيها يمثل القوى المعممة والتي سنرمز لها بالرمز Q_α والتي ستصبح في هذه الحالة على الصورة:

$$Q_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \qquad (5)$$

وعليه فإن معادلة لاجرانج للنظام المحافظ تصبح كالتالي:

$$Q_\alpha = \frac{d}{dt}(p_\alpha) \qquad (6)$$

ويلاحظ أنها تشبه بالشكل صيغة نيوتن لتعريف القوة إلا أنها ذات شمولية أكثر ومغزى أعمق لأنها لا تقتصر على نظام إحداثي خاص.

تعريف دالة هاملتون

كون هاملتون دالة هاملتون من دالة لاجرانج. وحيث عرفنا من قبل أن دالة لاجرانج تعتمد على الإحداثيات والسرعات المعممة وقد يوجد الزمن صراحة أو لا من ثم يمكن كتابة

$$L = L(q_\alpha , \dot{q}_\alpha , t)$$

$$\therefore\ dL = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (7)$$

بالتعويض من (٣) ، (٤) في (٧) نجد أن:

$$dL = \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{p}_\alpha dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

والتي يمكن وضعها في الصورة:

$$dL = \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{p}_\alpha dq_\alpha + d\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{q}_\alpha dp_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (8)$$

$$d\left(\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L\right) = -\sum_{\alpha=1}^{n} \dot{p}_\alpha dq_\alpha + \sum \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (9)$$

المقدار ما بين القوسين وصفه هاملتون مساوياً للدالة H أي

$$H = \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L(q_\alpha , \dot{q}_\alpha , t) \qquad (10)$$

والمعادلة (9) يجب حذف السرعات المعممة حتى تصبح H دالة في الإحداثيات وكمية الحركة ودالة لاجرانج وذلك بوضع $p_\alpha = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$ فنحصل على n من المعادلات التي نحلها في المجاهيل $\dot{q}_\alpha$ وتكون دالة هاملتون كدالة في الإحداثيات وكمية الحركة

والزمن أي $H(q_\alpha, p_\alpha, t)$. وإذا كانت L لا تعتمد على الزمن صراحة فإن H لا تعتمد صراحة على الزمن وتكون ثابت الحركة ولاثبات ذلك من المعادلة (9)

حيث أن $\frac{\partial H}{\partial t}=0$ فإن الدالة H تعتمد فقط على q_α, p_α فقط أي أن:

$$H=H(q_\alpha,p_\alpha)\ (1)\Rightarrow \frac{dH}{dt}=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\frac{dq_\alpha}{dt}+\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{dp_\alpha}{dt}\right)\quad (11)$$

وبالتعويض في (11) بمعادلات هاملتون القانونية التالية:

$$\dot{q}_\alpha=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha},\qquad \dot{p}_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$$

فنجد أن:

$$\frac{dH}{dt}=\sum_{\alpha=1}^{n}\left(-\dot{p}_\alpha\dot{q}_\alpha+\dot{p}_\alpha\dot{q}_\alpha\right)=0$$

وبالتالي $(H(q_\alpha,p_\alpha)=\text{const.})$ وهى معادلة ثبوت الطاقة.

٢-٣ استنتاج معادلات هاملتون Hamilton's Equations

<u>أولاً</u> : إذا كانت دالة هاملتون دالة في الإحداثيات المعممة وكمية الحركة

$$H=\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha\,\dot{q}_\alpha - L \quad (12)$$

$$\therefore dH=\sum p_\alpha\, d\dot{q}_\alpha+\sum_\alpha \dot{q}_\alpha\, dp_\alpha-\sum\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}dq_\alpha-\sum\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}d\dot{q}_\alpha \quad (13)$$

بالتعويض عن $\dot{p}_\alpha=\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$ ، $p_\alpha=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$ ينتج أن

$$dH=\sum \dot{q}_\alpha\, dp_\alpha-\sum\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}dq_\alpha \quad (14)$$

ولكن من معادلات لاجرانج $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)=\frac{d}{dt}(p_\alpha)=\dot{p}_\alpha$

بالتعويض في (14) ينتج أن :

$$dH = \sum \dot{q}_\alpha \, dp_\alpha - \sum \dot{p}_\alpha \, dq_\alpha \qquad (15)$$

وحيث أن دالة هاملتون دالة في الإحداثيات المعممة وكميات الحركة المعممة أي $H = H(p_\alpha, q_\alpha)$ إذن

$$dH = \sum \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha - \sum \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} dq_\alpha \qquad (16)$$

بمقارنة (15)، (16) نحصل على :

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \, , \; \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \qquad (17)$$

والمعادلة (17) تمثل معادلات هاملتون وهي معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولى وعددها 2n فقط وهى متماثلة. وهذا يعنى في الهاملتونيان ندرس حركة إحداثيات أي نقطة في الفراغ ذات 2n من الأبعاد p_α , q_α وترسم النقطة هذه مساراً في الفراغ أثناء حركة المجموعة في الفراغ العادي وتتحكم في حركة النقطة أو المجموعة معادلات هاملتون (11). ومعادلات هاملتون اسهل في حلها من معادلات لاجرانج لأنها من الرتبة الأولى.

ملاحظة : دالة هاملتون التي لا تعتمد صراحة على الزمن تظل ثابتة أثناء الحركة وتساوي الطاقة الكلية للمجموعة. وهذا يتضح من المعادلة (16)

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \dot{q}_\alpha - \sum \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \dot{p}_\alpha$$

$$= -\sum \dot{p}_\alpha \dot{q}_\alpha + \sum q_\alpha \dot{p}_\alpha = 0 \qquad (18)$$

والمعادلة (18) يمكن الوصول إليها مباشرة من الدالة $H = H(q_\alpha, p_\alpha)$ والتي لا تحتوي على الزمن صراحة وذلك بالتفاضل بالنسبة إلى الزمن t .

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{p}_\alpha \; \dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n} q_\alpha \; \dot{p}_\alpha = 0$$

بالتكامل فإن :

$$H = \text{const.} = E \qquad (19)$$

حيث E ثابت يساوي مقدار الطاقة الكلية للمجموعة. ولإثبات ذلك نعلم أن المجموعات المحافظة تكون طاقة الحركة دالة بربيعية في السرعة المعممة $\dot{q}_\alpha$ وطبقاً لنظرية أويلر للدوال المتجانسة يكون

$$\sum_{\alpha=1}^{n} q_\alpha \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = 2T$$

وحيث أن طاقة الوضع للمجموعة المحافظة لا تعتمد على السرعات فإن :

$$\sum \dot{q}_\alpha \, p_\alpha = 2T$$

بالتعويض عن ذلك في دالة هاملتون يكون

$$H = \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = 2T - (T - V) = T + V = E \qquad (20)$$

وتكون دالة هاملتون التي لا تعتمد صراحة على الزمن هي الطاقة الكلية للمجموعة الديناميكية وتكون مقدارها ثابت أثناء الحركة(المجموعة الديناميكية محافظة).

ثانياً : إذا كانت دالة هاملتون تعتمد صراحة على الزمن :

أي أن $H = H(q_\alpha, p_\alpha, t)$ وكذلك $L = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$

في هذه الحالة تكون d H كالتالي :

$$dH=\sum p_\alpha d\dot{q}_\alpha+\sum \dot{q}_\alpha\, dp_\alpha-\sum\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}dq_\alpha$$
$$-\sum\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}d\dot{q}_\alpha-\sum\frac{\partial L}{\partial t}dt \tag{21}$$

بالتعويض عن $\dot{p}_\alpha=\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$ ، $p_\alpha=-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$ في (21)

$$dH=\sum_\alpha \dot{q}_\alpha\, dp_\alpha-\sum_\alpha \dot{p}_\alpha\, dq_\alpha-\frac{\partial L}{\partial t}dt \tag{22}$$

وحيث أن $H=H(p_\alpha,q_\alpha,t)$

إذن

$$dH=\sum \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}dp_\alpha+\sum_\alpha\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}dq_\alpha+\frac{\partial H}{\partial t}dt \tag{23}$$

بمقارنة المعادلة (22)، (23) نحصل على :

$$\dot{q}_\alpha=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\quad,\ \dot{p}_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\quad,\ \frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}$$

مما سبق نلاحظ انه إذا كانت L تعتمد على الزمن صراحة فان H كذلك.

أما إذا لم تعتمد L على الزمن صراحة فكذلك H أي أن .

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0 \qquad \text{فإن} \qquad \frac{\partial H}{\partial t}=0$$

إذا كانت $\dot{p}_\alpha=0$ أي H=0 وهذا معناه أن q_α تكون إحداثي دوري أو مهمل والعكس صحيح.

مثال ١:

أثبت أنه إذا كانت دالة هاملتون H لا تعتمد صراحة على الزمن t فإنها تكون ثابتة.

الحـل

حيث أن $\frac{\partial H}{\partial t}=0$ فإن الدالة H تعتمد فقط على q_s, p_s فقط أي أن:

$$H=H(q_s,p_s)\ (1)\Rightarrow \frac{dH}{dt}=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_s}\frac{dq_s}{dt}+\frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{dp_s}{dt}\right)\ (2)$$

وبالتعويض في (٢) بمعادلات هاملتون القانونية التالية:

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\qquad \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}$$

فنجد أن:

$$\frac{dH}{dt}=\sum_{s=1}^{n}\left(-\dot{p}_s\dot{q}_s+\dot{p}_s\dot{q}_s\right)=0$$

وبالتالي $(H(q_s,p_s)=const.)$ وهى معادلة ثبوت الطاقة.

مثال ٢:

أثبت أنه إذا كانت معادلات التحويل على الصورة: $\vec{r}_i=\vec{r}_i(q_s)$ لا تعتمد على الزمن (أي أن $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}=0$) فإن طاقة الحركة للمجموعة تكون دالة تربيعية متجانسة في سرعات العموم وإذا كانت $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_s}=0$ بالإضافة إلى ذلك فإن: $H=T+V=E$ حيث E الطاقة الكلية للمجموعة.

الحـل

حيث أن: $\vec{r}_i=\vec{r}_i(q_s)$

فإن:

$$\dot{\vec{r}}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s \qquad (1)$$

طاقة الحركة للمجموعة تعطى من:

$$T=\frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i.\dot{\vec{r}}_i \qquad (2)$$

بالتعويض من (١) في (٢) نجد أن:

$$T=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}.\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\dot{q}_k\dot{q}_j \qquad (3)$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}a_{kj}(q_s)\dot{q}_k\dot{q}_j \qquad (4)$$

حيث:

$$a_{kj}(q_s)=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}.\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}) \qquad (5)$$

واضح من المعادلة (٤) أن طاقة الحركة للمجموعة هي دالة تربيعية متجانسة فى سرعات العموم وهذا يحدث عندما تكون $\vec{r}_i$ لا تعتمد صراحة على الزمن. وبذلك ثبت المطلوب.

وإذا كانت $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_s}=0$ أي دالة الجهد لا تعتمد على السرعات المعممة فإن:

$$p_s=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}(T-V)=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_s}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \qquad (6)$$

إذا بتفاضل طرفي المعادلة (٤) جزئيا بالنسبة إلى $\dot{q}_s$ نجد أن:

$$p_s=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}=\sum_{k=1}^{n}a_{ks}\dot{q}_k \qquad (7)$$

بضرب طرفي (٧) في $\dot{q}_s$ والجمع على جميع قيم s نجد أن:

$$\sum_{k=1}^{n}p_s\dot{q}_s=\sum_{k,s=1}^{n}a_{ks}\dot{q}_k\dot{q}_s \qquad (8)$$

من (٤) في (٨) نجد أن:

$$\sum_{k=1}^{n} p_s\dot{q}_s = 2T \qquad (9)$$

وحيث أن:

$$H = \sum_{s=1}^{n} p_s\dot{q}_s - L = \sum_{s=1}^{n} p_s\dot{q}_s - (T - V) = 2T - T + V$$
$$= T + V = E$$

أي أن الدالة H تساوى الطاقة الكلية للمجموعة التي فرضناها وهو المطلوب.

ومن هذا المثال نجد أن H دالة هاملتون لنظام محافظ تمتلك ميزة مهمة وهى أنها تكافئ الطاقة الكلية للنظام.

❖ **ملاحظات:**

١) في الميكانيكا الكلاسيكية طاقة الحركة لجسيم يتحرك في خط مستقيم كتلته m وموضعه من نقطة الأصل x تعطى من العلاقة:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

وكمية حركته يمكن إيجادها بتفاضل المعادلة السابقة بالنسبة للسرعة $\dot{x}$ فنجد أن:

$$\text{كمية الحركة} = p = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

وهذا يشبه تماما ما يحدث في كمية الحركة المعممة.

٢) في الحالة الخاصة عندما أحد الإحداثيات وليكن q_λ لم يظهر صراحة في اللاجرانجيان L إذن:

$$\dot{p}_\lambda = \frac{\partial L}{\partial q_\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\lambda = const. = c_\lambda$$

وفى هذه الحالة الإحداثي q_λ يسمى إحداثي مهمل أو مستتر أو دوري (Ignorable or cyclic coordinates) وكمية الحركة المصاحبة للإحداثي المعمم المهمل تكون ثابت

من ثوابت النظام. ومثال على أحد الإحداثيات التي لم تظهر صراحة في دالة لاجرانج هو الزمن وفى هذه الحالة نجد أن:

$$\dot{p}_{(t)} = -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{(t)} = H = \text{const.}$$

مثال ٣: أوجد معادلات هاملتون لحركة متذبذب توافقي أحادي البعد.

الحـل

باعتبار أن x هو الإحداثي المعمم الوحيد في هذا المثال وسبق أن أوجدنا للمتذبذب التوافقي الأحادي البعد الكميات التالية:

$$q_i = x, \qquad \dot{q}_i = \dot{x}$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\,, \;\; V = \frac{1}{2}kx^2$$

ومنها نجد أن:

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{p}{m}$$

دالة هاملتون تصبح:

$$H = T + V = \frac{1}{2}m(\frac{p^2}{m^2}) + \frac{1}{2}kx^2$$

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kx^2 \qquad (1)$$

معادلات هاملتون (معادلات الحركة) تصبح:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x}, \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p}$$

عندئذ تصبح:

$$\frac{p}{m} = \dot{x}, \qquad kx = -\dot{p}$$

المعادلة الأولى عبارة عن نص آخر للعلاقة بين السرعة وكمية الحركة وفى هذه الحالة وعند استعمال المعادلة الأولى يمكن كتابة الثانية كما يلي:

$$kx = -\frac{d}{dt}(m\dot{x})$$

أو عند ترتيب الحدود نحصل على:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

وهذه هي معادلة المتذبذب التوافقي المعروفة.

مثال ٤

إذا كانت دالة لاجرانج معطاة بالعلاقة التالية:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) - V(q_1, q_2)$$

أثبت أن: $H = \frac{2}{3m}(p_1^2 + p_2^2 - p_1p_2) + V(q_1, q_2)$

وأن معادلة الحركة هي: $m\ddot{q}_1 = \frac{2}{3}\frac{\partial V}{\partial q_2} - \frac{4}{3}\frac{\partial V}{\partial q_1}$

الحل

حيث أن دالة لاجرانج لا تعتمد على الزمن صراحة فإن:

$$H = T + V$$

$$\therefore H = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + V(q_1, q_2) \tag{1}$$

وكذلك نعلم أن كميات الحركة المعممة يمكن إيجادها كالتالي:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \Rightarrow p_1 = \frac{1}{2} m(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \qquad (2)$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \Rightarrow p_2 = \frac{1}{2} m(\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2) \qquad (3)$$

بحل المعادلتين (٢)، (٣) نحصل على:

$$\dot{q}_1 = \frac{2}{3m}(2p_1 - p_2)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{2}{3m}(2p_2 - p_1)$$

وعلى ذلك يمكن كتابة الآن دالة هاملتون بدلالة كميات الحركة المعممة كالتالي:

$$H = \frac{1}{2} m\left(\frac{4}{gm^2}(2p_1 - p_2)^2 + \frac{4}{gm^2}(2p_1 - p_2)(2p_2 - p_1)\right.$$

$$\left. + \frac{4}{gm^2}(2p_2 - p_1)^2\right) + V(q_1, q_2) \qquad (4)$$

$$H = \frac{2}{3m}(p_1^2 + p_2^2 - p_1 p_2) + V(q_1, q_2)$$

وهو المطلوب أولا.

ولإيجاد معادلة الحركة نتبع التالي:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{1}{2} m(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2), \quad \frac{\partial L}{\partial q_1} = -\frac{\partial V}{\partial q_1}$$

إذن من معادلات لاجرانج نحصل على:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} m(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right] + \frac{\partial V}{\partial q_1} = 0$$

$$m\ddot{q}_1 + \frac{1}{2} m\ddot{q}_2 + \frac{\partial V}{\partial q_1} = 0 \qquad (5)$$

بالمثل:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{1}{2} m(\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2), \qquad \frac{\partial L}{\partial q_2} = -\frac{\partial V}{\partial q_2}$$

$$\frac{d}{dt}[\frac{1}{2} m(\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2)] + \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{1}{2} m\ddot{q}_1 + m\ddot{q}_2 + \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0$$

بضرب المعادلة (٥) في العدد (- ٢) وجمعها على المعادلة (٦) نحصل على:

$$m\ddot{q}_1(\frac{1}{2} - 2) + (\frac{\partial V}{\partial q_2} - 2\frac{\partial V}{\partial q_1}) = 0 \quad \Rightarrow -\frac{3}{2} m\ddot{q}_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2} - 2\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0$$

$$m\ddot{q}_1 = \frac{2}{3}\frac{\partial V}{\partial q_2} - \frac{4}{3}\frac{\partial V}{\partial q_1}$$

وهذه هي معادلة الحركة المطلوبة.

❖ ملاحظة

كيف يمكن الحصول على معادلة الحركة باستخدام معادلات هاملتون؟

يمكن الحصول على معادلات الحركة باستخدام معادلات هاملتون كالتالي:

معادلات هاملتون هي:

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \qquad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}$$

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{2}{3m}(2p_1 - p_2) + \frac{\partial V}{\partial q_1} \qquad (1)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial q_2} = \frac{2}{3m}(2p_2 - p_1) + \frac{\partial V}{\partial q_2} \qquad (2)$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -\frac{\partial V}{\partial q_1} \qquad (3)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -\frac{\partial V}{\partial q_2} \qquad (4)$$

بتفاضل المعادلة (١) بالنسبة للزمن نحصل على:

$$\ddot{q}_1 = \frac{2}{3m}(2\dot{p}_1 - \dot{p}_2) \qquad (5)$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{2}{3m}(2\dot{p}_2 - \dot{p}_1) \qquad (6)$$

بالتعويض من (٣) و(٤) في (٥) نحصل على:

$$\ddot{q}_1 = \frac{2}{3m}(-2\frac{\partial V}{\partial q_1} - \frac{\partial V}{\partial q_2})$$

بالتعويض من (٣) ،(٤) في (٦) نحصل على:

$$\ddot{q}_2 = \frac{2}{3m}\frac{\partial V}{\partial q_2} - \frac{4}{3m}\frac{\partial V}{\partial q_1})$$

وهو المطلوب.

مثال ٥:

منظومة ميكانيكية لها دالة لاجرانج التالية:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}(q_1 - q_2)^2 \qquad (1)$$

أوجد: أ) دالة هاملتون ب) معادلات هاملتون

جـ) كميات الحركة المعممة والإحداثيات المعممة

الحل

في هذا المثال حيث أن طاقة الحركة دالة تربيعية متجانسة في سرعات العموم وهى ما يمكن التعبير عنه بالمقدار:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)$$

وكذلك طاقة الجهد لا تعتمد اعتمادا صريحا على الزمن وعلى السرعات المعممة فإنه يمكن كتابة دالة هاملتون مباشرة على النحو التالي:

$$H = T + V$$

$$H = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}(q_1 - q_2)^2 \qquad (2)$$

وحيث أن تعريف كمية الحركة المعممة يعطى من:

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}$$

فإنه يمكن الحصول على كميتي الحركة المعممتين التاليتين:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \;\Rightarrow\; p_1 = \dot{q}_1 + \frac{1}{2}\dot{q}_2 \\ p_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \;\Rightarrow\; p_2 = \frac{1}{2}\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

بحل المعادلتين (٣) السابقتين نجد أن:

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{2}{3}(2p_1 - p_2) \\ \dot{q}_2 &= \frac{2}{3}(2p_2 - p_1) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

بالتعويض من (٤) في دالة هاملتون (٢) نحصل على دالة هاملتون معتمدة على السرعات المعممة q_s وكذلك على كميات الحركة المعممة p_s كالتالي:

$$H = \frac{1}{2}\Big(\frac{4}{9}(4p_1^2 - 4p_1p_2 + p_2^2) + \frac{4}{9}(4p_2^2 - 4p_1p_2 + p_1^2)$$

$$+ \frac{4}{9}(4p_1p_2 - 2p_2^2 - 2p_1^2 + p_1p_2) + \frac{1}{2}(q_1 - q_2)^2$$

وبالاختصار تصبح:

$$H = \frac{2}{9}\left(3p_1^2 + 3p_2^2 - 3p_1p_2\right) + (q_1 - q_2)^2 \quad (5)$$

$$H = \frac{2}{3}(p_1^2 - p_1p_2 + p_2^2 + + \frac{1}{2}(q_1 - q_2)^2$$

معادلات هاملتون تصبح:

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \qquad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}$$

ومنها نجد أن:

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1} \Rightarrow \dot{q}_1 = \frac{4}{3}p_1 - \frac{2}{3}p_2 \\ \dot{q}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_2} \Rightarrow \dot{q}_2 = \frac{4}{3}p_2 - \frac{2}{3}p_1 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial q_1} \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_1 = -\frac{2}{2}(q_1 - q_2) \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial q_2} \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_2 = +\frac{2}{2}(q_1 - q_2) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

بتفاضل المعادلات (٦) بالنسبة للزمن نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= \frac{4}{3}\dot{p}_1 - \frac{2}{3}\dot{p}_2, \\ \ddot{q}_2 &= \frac{4}{3}\dot{p}_2 - \frac{2}{3}\dot{p}_1 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

بالتعويض من (٧) في (٨) نحصل على:

$$\ddot{q}_1 = \frac{4}{3}[-(q_1 - q_2)] - \frac{2}{3}[(q_1 - q_2]] = -\frac{4}{3}q_1 + \frac{4}{3}q_2 - \frac{2}{3}q_1 + \frac{2}{3}q_2$$

$$\ddot{q}_1 = 2q_2 - 2q_1 \quad (9)$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{4}{3}[(q_1 - q_2)] - \frac{2}{3}[-(q_1 - q_2] = -\frac{4}{3}(q_1 - q_2) + \frac{2}{3}(q_1 - q_2) \quad \ddot{q}_2 = 2q_1 - 2q_2 \tag{10}$$

بجمع (٩)،(١٠) نحصل على:

$$\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = 0 \tag{11}$$

وبإجراء التكامل نحصل على:

$$\dot{q}_1 + \dot{q}_2 = c_1 = \text{const.} \tag{12}$$

وبإجراء التكامل مرة أخرى نحصل على:

$$q_1 + q_2 = c_1 t + c_2 \tag{13}$$

بالتعويض من (١٣) في (٩) نحصل على معادلة تفاضلية في مجهول واحد فقط على الصورة:

$$\ddot{q}_1 = 2(c_1 t + c_2) - 4q_1$$

$$\ddot{q}_1 + 4q_1 = (2c_1 t + c_2) \tag{14}$$

والحل العام للمعادلة التفاضلية (١٤) يتكون من حل المعادلة المتجانسة وليكن $q_1^{(1)}$ بالإضافة إلى أي حل خاص وليكن $q_1^{(2)}$ على النحو التالي:

$$q_1 = q_1^{(1)} + q_2^{(2)} \tag{15}$$

حيث أن حل المعادلة المتجانسة:

$$\ddot{q}_1 + 4q_1 = 0$$

يعطى على الصورة:

$$q_1^{(1)} = c_3 \sin(2t + \varepsilon) \tag{16}$$

حيث ε, c_3 ثوابت.

والحل الخاص $q_1^{(2)}$ يعطى من:

$$q_1^{(2)} = \frac{1}{D^2+4}(2c_1+c_2) = \frac{2}{4}\frac{1}{1+\frac{1}{4}D^2}(c_1t+\frac{1}{2}c_2)$$
$$= \frac{1}{2}(1+\frac{1}{4}D^2)^{-1}(c_1t+\frac{1}{2}c_2)$$
$$= \frac{1}{2}(1-\frac{D^2}{4}+(\frac{D^2}{4})^2-......)(c_1t+\frac{1}{2}c_2)$$
$$= \frac{1}{2}(c_1t+\frac{1}{2}c_2) \quad (17)$$

وعلى ذلك يصبح الحل العام على الصورة النهائية التالية:

$$q_1 = \frac{1}{2}(c_1t+\frac{1}{2}c_2)+c_3\sin(2t+\varepsilon) \quad (18)$$

وبالتعويض في (١٣) يمكن الحصول على q_2 على الصورة:

$$q_2 = \frac{1}{2}c_1t+\frac{3}{4}c_2-c_3\sin(2t+\varepsilon) \quad (19)$$

من ذلك نرى أن المعادلتين (١٨)،(١٩) تعطى الإحداثيات المعممة.
وبالتعويض من (١٨)،(١٩) في (٧) يمكن إيجاد كميات الحركة المعممة على الصورة التالية:

$$p_1 = \dot{q}_1 = \frac{1}{2}c_1+2c_2\cos(2t+\varepsilon)$$
$$p_2 = \dot{q}_2 = \frac{1}{2}c_1-2c_3\cos(2t+\varepsilon)$$

مثال٦:
منظومة ميكانيكية طاقة حركتها هي: $T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)$ وطاقة جهدها هي: $V=(q_1+q_2)^2$ أوجد دالة هاملتون ، ومعادلات هاملتون، وحل معادلات هاملتون لتعين الإحداثيات المعممة q_s وكميات الحركة المعممة.

الحـل

في هذا المثال حيث أن طاقة الحركة دالة تربيعية متجانسة في سرعات العموم وكذلك لا تعتمد طاقة الجهد اعتمادا صريحا على السرعات المعممة ·· فإنه يمكن كتابة دالة هاملتون مباشرة كما يلي:

$$H = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + (q_1 - q_2)^2 \qquad (1)$$

وحيث ان تعريف كمية الحركة المعممة يعطى من:

$$p_s = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \qquad (2)$$

فإنه يمكن الحصول على كميتي الحركة المعممتين التاليتين:

$$p_1 = \dot{q}_1, p_2 = \dot{q}_2 \qquad (3)$$

بالتعويض من (٣) في (١) نحصل على دالة هاملتون بدلالة كميات الحركة المعممة والإحداثيات المعممة في الصورة:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + (q_1 - q_2)^2 \qquad (4)$$

باستخدام معادلات هاملتون التالية:

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s} \quad , \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \qquad (5)$$

يمكن الحصول على:

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_1 &= p_1 \\ \dot{q}_2 &= p_2 \end{aligned}\right\} \; (6) \quad , \quad \left.\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -2(q_1 - q_2) \\ \dot{p}_2 &= 2(q_1 - q_2) \end{aligned}\right\} \; (6)'$$

بتفاضل المعادلات (6) والتعويض من $(6)'$ نجد أن:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{q}_1 = \dot{p}_1 \quad &\Rightarrow \quad \ddot{q}_1 = -2(q_1 - q_2) \\ \ddot{q}_2 = \dot{p}_2 \quad &\Rightarrow \quad \ddot{q}_2 = 2(q_1 - q_2) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

بجمع المعادلتين (٧) نحصل على المعادلة التفاضلية التالية:

$$\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = 0 \tag{8}$$

بإجراء التكامل نحصل على:

$$\dot{q}_1 + \dot{q}_2 = \text{const} = c_1 \tag{9}$$

بإجراء التكامل مرة أخرى نحصل على:

$$q_1 + q_2 = c_1 t + c_2 \tag{10}$$

باستخدام (١٠) في (٧) نحصل على معادلة تفاضلية في مجهول واحد فقط على الصورة التالية:

$$\ddot{q}_1 + 4q_1 = 2(c_1 t + c_2) \tag{11}$$

الحل للمعادلة (١١) يتكون من حل المعادلة المتجانسة وليكن $q_1^{(1)}$ بالإضافة إلى أي حل خاص وليكن $q_1^{(2)}$ على النحو التالي:

$$q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)} \tag{12}$$

حيث أن المعادلة المتجانسة هي:

$$\ddot{q}_1 + 4q_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1^{(1)} = c_3 \sin(2t + \varepsilon) \tag{13}$$

حيث ε, c_3 مقدارين ثابتين. والحل الخاص $q_1^{(2)}$ يعطى من:

$$q_1^{(2)} = \frac{1}{D^2 + 4}(2c_1 t + c_2) = \frac{2}{4}\frac{1}{1 + \frac{1}{4}D^2}(c_1 t + \frac{1}{2}c_2)$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{4}D^2)^{-1}(c_1 t + \frac{1}{2}c_2)$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \frac{D^2}{4} + (\frac{D^2}{4})^2 \cdots)(c_1 t + \frac{1}{2}c_2)$$

$$= \frac{1}{2}(c_1 t + \frac{1}{2}c_2)$$

وعلى ذلك يصبح الحل العام على الصورة النهائية التالية:

$$q_1 = \frac{1}{2}(c_1 t + \frac{1}{2}c_2) + c_3 \sin(2t + \varepsilon) \tag{14}$$

وبالتعويض في (١٥) يمكن الحصول على q_2 على الصورة التالية:

$$q_2 = \frac{1}{2}c_1 t + \frac{3}{4}c_2 - c_3 \sin(2t + \varepsilon) \qquad (15)$$

من ذلك نرى أن المعادلتين (١٤)، (١٥) تعطيان الإحداثيين المعممين. بالتعويض من (١٤)، (١٥) في ©(6) يمكن إيجاد كميتين الحركة المعممة على الصورة التالية:

$$p_1 = \dot{q}_1 = \frac{1}{2}c_1 + 2c_3 \cos(2t + \varepsilon) \qquad (16)$$

$$p_2 = \dot{q}_2 = \frac{1}{2}c_1 - 2c_3 \cos(2t + \varepsilon) \qquad (17)$$

مثال ٧:

إذا كانت دالة هاملتون لنظام ديناميكي هي: $H = q_1 p_1 - q_2 p_2 - a q_1^2 + b q_2^2$

أثبت أن:

$$\text{(i)} \frac{p_2 - b q_2}{q_1} = \text{const.} \quad \text{(ii)} q_1 q_2 = \text{const.}$$

$$\text{(iii)} \ \ell n q_1 = t + \text{const}$$

الحـل

معادلات هاملتون للحركة هي:

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s} \quad , \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \qquad (١)$$

ومنها نجد أن:

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial}{\partial p_1}(q_1 p_1 - q_2 p_2 - a q_1^2 + b q_2^2)$$

$$\therefore \quad \dot{q}_1 = q_1$$

وبالمثل نجد أن: $\dot{q}_2 = -q_2$ (٢)

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -\frac{\partial}{\partial q_1}(q_1 p_1 - q_2 p_2 - a q_1^2 + b q_2^2)$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{p}_1 &= -p_1 - 2aq_1,\\ \dot{p}_2 &= p_2 - 2bq_2\end{aligned}\right\} \qquad (٣)$$

والآن ننظر للمطلوب الأول:

$$\text{(i)}\ \frac{d}{dt}\left(\frac{p_2 - bq_2}{q_1}\right) = \frac{q_1(\dot{p}_2 - b\dot{q}_2) - (p_2 - bq_2)\dot{q}}{q_1^2}$$

$$= \frac{q_1[(p_2 - 2bq_2) + bq_2] - (p_2 - bq_2)q_1}{q_1^2}$$

$$= \frac{q_1(p_2 - 2bq_2 + bq_2 - p_2 + bq_2)}{q_1^2}$$

$$= 0$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{p_2 - bq_2}{q_1} = \text{const.}$$

أما بالنسبة للمطلوبين الأخيرين فنجد أن:

$$\text{(ii)}\ \frac{d}{dt}(q_1q_2) = \dot{q}_1\dot{q}_2 + q_1\dot{q}_2 = q_1q_2 - q_1q_2 = 0$$

$$\therefore q_1q_2 = \text{const.}$$

$$\text{(iii)}\ \frac{d}{dt}(\ell n q_1) = \frac{1}{q_1}\dot{q}_1 = \frac{1}{q_1}q_1 = 1$$

$$(\ell n q_1) = dt \quad \Rightarrow \quad \ell n q_1 = t + \text{const.}$$

مثال ٨:

إذا كان الفرق بين طاقتي الحركة والموضع لمنظومة ميكانيكية يعطي من العلاقة التالية:

$$\frac{\dot{x}^2}{2(A + By^2)} + \frac{1}{2}\dot{y}^2 - cy^2$$

حيث A,B,C ثوابت. أوجد معادلات هاملتون ومعادلات الحركة لهذه المنظومة.

الحل

دالة لاجرانج معطاة من المثال كالتالي:

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2(A + By^2)} + \frac{1}{2}\dot{y}^2 - cy^2 \qquad (١)$$

لإيجاد معادلات هاملتون نبدأ من تعريف كمية الحركة هي:

(٢) $$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}$$ ومنها نحصل على:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{2\dot{x}}{2(A+By^2)} \Rightarrow \dot{x}^2 = p_1^2(A+By^2)^2$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} \Rightarrow \dot{y} = p_2$$

من تعريف دالة هاملتون نجد أن:

$$H = \sum p_s \dot{q}_s - L$$

$$= p_1\dot{x} + p_2\dot{y} - \frac{\dot{x}^2}{2(A+By^2)} - \frac{1}{2}\dot{y}^2 + cy^2$$

$$H = p_1^2(A+By^2) + p_2^2 - \frac{p_1^2(A+By^2)^2}{2(A+By^2)} - \frac{1}{2}p_2^2 + cy^2$$

$$H = \frac{1}{2}p_1^2(A+By^2) + \frac{1}{2}p_2^2 + cy^2$$

من معادلات هاملتون للإيجاد السرعات وكميات الحركة المعممة نجد أن:

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s} \quad , \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\left[\frac{1}{2}p_1^2(2By) + 2cy\right]$$

$$\dot{p}_2 = -y(Bp_1^2 + 2c) \Rightarrow \quad \dot{p}_2 = -y[B\frac{\dot{x}^2}{(A+By^2)^2} + 2c]$$

معادلة الحركة في اتجاه محور **y** تصبح:

$$\ddot{y} = -\frac{By\dot{x}^2}{(A+By^2)^2} - 2cy \quad (٤)$$

$$p_1 = \frac{\dot{x}}{(A+By^2)} \Rightarrow \quad \dot{p}_1 = \frac{(A+By^2)\ddot{x} - \dot{x}(2By\dot{y})}{(A+By^2)^2} = \frac{0}{1}$$

ومنها نجد أن معادلة الحركة في اتجاه محور x تصبح:

$$(A + By^2)\ddot{x} - 2By\dot{y}\dot{x} = 0 \qquad (5)$$

،أيضا يمكن الحصول على حل للمعادلتين التفاضليتين كالتالي:

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \qquad \dot{p}_2 = \frac{\partial H}{\partial y} = -(Byp_1^2 + 2cy)$$

$$\dot{p}_1 = 0 \Rightarrow \qquad p_1 = \lambda$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = (A + By^2)p_1$$

$$\dot{x} = \lambda(A + By^2)$$

$$\dot{y} = p_2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = \dot{p}_2 = -(By\lambda^2 + 2cy)$$

$$\therefore \quad \ddot{y} = -(B\lambda^2 + 2c)y = -\omega^2 y$$

$$\therefore \omega^2 = (B\lambda^2 + 2c)$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 y \quad \Rightarrow \quad y = D_1 \cos(\omega t + D_2)$$

$$\dot{x} = \lambda A + \lambda B(D_1 \cos(\omega t + D_2))^2$$

$$= \lambda A + \lambda B D_1^2 \cos^2(\omega t + D_2)$$

$$x(t) = \lambda A t + \lambda B D_1^2 \int \cos^2(\omega t + D_2) dt$$

$$= \lambda A t + \frac{1}{2}\lambda B D_1^2 \int [(\cos^2(\omega t + D_2)) + 1] dt$$

$$= \lambda A t + \frac{1}{2}\lambda B D_1^2 \left\{ \frac{\sin(2\omega t + D_2)}{2\omega} + t \right\} + D_3$$

$$= \lambda A t + \frac{1}{2}\lambda B D_1^2 t + \frac{1}{4\omega}\lambda B D_1^2 \sin(2\omega t + D_2) + \frac{1}{2}\lambda B D_1^2 D_3$$

مثال ٩:

إذا كانت دالة لاجرانج لمنظومة ميكانيكية هي:

$$L = (k + \frac{1}{2})\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 - \frac{n^2}{2}(k+1)q_1^2 - \frac{n^2}{2}q_2^2$$

فأوجدي: أ- معادلات لاجرانج (هي معادلات الحركة)

ب- حل معادلات لاجرانج أي إيجاد $q_1(t), q_2(t)$. جـ- دالة هاملتون.

د- معادلات هاملتون. هـ- معادلات الحركة باستخدام معادلات هاملتون ومقارنتها مع معادلات الحركة التي أوجدت من معادلات لاجرانج.

الحـل

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 2(k+\frac{1}{2})\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \quad , \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_1 + \dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}) = 2(k+\frac{1}{2})\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \quad , \qquad \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}) = \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -n^2(k+1)q_1 \quad , \qquad \frac{\partial L}{\partial q_1} = -n^2 q_2$$

❖ معادلات لاجرانج الأولى:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}) = \frac{\partial L}{\partial q_1}$$

$$2(k+\frac{1}{2})\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = -n^2(k+1)q_1 \tag{2}$$

❖ **معادلات لاجرانج الثانية:**

$$\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = -n^2 q_2 \tag{3}$$

بجمع المعادلتين (٢)، (٣) نجد أن:

$$2[(k+1)\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2] + n^2[(k+1)q_1 + q_2] = 0 \tag{4}$$

بوضع: $(k+1)q_1 + q_2 = y \Rightarrow (k+1)\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = \ddot{y}$

ومنها نجد أن: $2\ddot{y} + n^2 y = 0 \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{n^2}{2} y$

وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة حلها معروف ويمكن وضعه على الصورة:

$$y = C_1\cos(\omega t + C_2), \quad \omega^2 = \frac{n^2}{2}$$

$$(k+1)q_1 + q_2 = C_1\cos(\omega t + C_2) \tag{5}$$

بضرب المعادلة (٣) في $(k+1)$ نجد أن:

$$(k+1)\ddot{q}_1 + (k+1)\ddot{q}_2 = -n^2(k+1)q_2 \tag{6}$$

بطرح (٦) من (٢) نجد أن:

$$k(\ddot{q}_1-\ddot{q}_2)+n^2(k+1)(q_1+q_2)=0 \quad (7)$$

بوضع:
$$q_1-q_2=x$$

ومنها نجد أن :
$$\ddot{q}_1-\ddot{q}_2=\ddot{x}$$

$$\ddot{x}=-\frac{n^2(k+1)}{k}x \quad (8)$$

هذه أيضا معادلة حركة توافقية بسيطة فيها : $\omega_2^2=\frac{n^2(k+1)}{k}$

$$x=C_3\cos(\omega_2 t+C_4)$$

$$q_1-q_2=C_3\cos(\omega_2 t+C_4) \quad (9)$$

بجمع المعادلتين (٩)، (٥) نجد أن:

$$q_1+(k+1)q_1=C_1(\cos\omega_1 t+C_2)+C_3(\cos\omega_2 t+C_4)$$

$$q_1=\frac{1}{(k+2)}\{C_1\cos(\omega_1 t+C_2)+C_3\cos(\omega_2 t+C_4)\}$$

وبالمثل يمكن إيجاد q_2

دالة هاملتون يمكن وضعها على الصورة التالية (وذلك لان فيها طاقة الحركة دالة تربيعية متجانسة في السرعات المعممة ، وطاقة الموضع دالة فقط في الإحداثيات المعممة):

$$H=(k+\frac{1}{2})\dot{q}_1^2+\dot{q}_1\dot{q}_2+\frac{1}{2}\dot{q}_2^2+\frac{n^2}{2}(k+1)q_1^2+\frac{n^2}{2}q_2^2 \quad (10)$$

من تعريف كمية الحركة المعممة نجد أن:

$$p_1=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_1} \quad ، \quad p_2=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}=\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_2}$$

ومنها نحصل على:

$$p_1 = 2(k+\frac{1}{2})\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \qquad (11)$$

$$\dot{p}_1 = 2(k+\frac{1}{2})\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \qquad (12)$$

$$\dot{p}_2 = \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \qquad (13)$$

من معادلات هاملتون:

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial L}{\partial q_1} = -n^2(k+1)q_1 \qquad (14)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial L}{\partial q_2} = -n^2 q_2 \qquad (15)$$

واضح من (١٤)، (١٢) نجد أن:

$$2(k+1)\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = -n^2(k+1)q_1 \qquad (16)$$

من (١٥)، (١٣) نجد أن:

$$\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = -n^2 q_2 \qquad (17)$$

مثال ١٠: (آلة أتود المزدوجة):

كتلة m_1 معلقة عند أحد طرفي خيط خفيف طوله ℓ_1 يمر على بكرة خفيفة مثبتة ملساء وعند الطرف الآخر للخيط توجد بكرة خفيفة أيضا ومثبتة وملساء يمر عليها خيط خفيف طوله ℓ_2 ويحمل كتلتين m_2, m_3.

أوجد: أ- دالة هاملتون ومعادلات هاملتون ب- معادلات الحركة للبكرتين.

الحل

سبق أن تم حل هذا المثال باستخدام دالة لاجرانج والآن سوف نقوم بتطبيق دالة هاملتون للحصول على نفس النتائج.

توجد درجتان حرية للمنظومة q_1, q_2 هما الإحداثيان المعممان. أيضا البكرتان خفيفتا الوزن وكذلك الخيوط ℓ_1, ℓ_2 نوجد أولا: طاقة الحركة للمجموعة كالتالي:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(-\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2}m_3(-\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2$$

أي أن:

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}m_2(\dot{q}_1^2-2\dot{q}_1\dot{q}_2+\dot{q}_2^2)+\frac{1}{2}m_3(\dot{q}_1^2$$
$$+2\dot{q}_1\dot{q}_2+\dot{q}_2^2)$$

إذا طاقة الحركة تصبح في الصورة التالية:

$$T=\frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)\dot{q}_1^2+(m_3-m_2)\dot{q}_1\dot{q}_2+\frac{1}{2}(m_2+m_3)\dot{q}_2^2$$

نوجد الآن طاقة الجهد:

$$V=-m_1gq_1-m_2g[q_2+\ell_1-q_1]-m_3g[(\ell_1-q_1)+(\ell_2-q_2)]$$

والتي يمكن اختصارها على النحو التالي:

$$V=(m_2+m_3-m_1)gq_1+(m_3-m_2)gq$$
$$-(m_2\ell_1+m_3\ell_1+m_3\ell_2)g$$

على ذلك تصبح دالة لاجرانج على الصورة التالية:

$$L=T-V \qquad (2)$$

$$L=\frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)\dot{q}_1^2+(m_3-m_2)\dot{q}_1\dot{q}_2$$
$$+\frac{1}{2}(m_2+m_3)\dot{q}_2^2-(m_2+m_3-m_1)gq_1 \qquad (3)$$
$$-(m_3-m_2)gq_2+[m_2\ell_1+m_3(\ell_1+\ell_2)]g$$

وسبق في الفصل الثاني إيجاد معادلات الحركة من دالة لاجرانج L وكانت المعادلة الأولى المصاحبة للإحداثي q_1 كالتالي:

$$(m_1+m_2+m_3)\ddot{q}_1+(m_3-m_2)\ddot{q}_2=-(m_2+m_3-m_1)g \quad (4)$$

وكذلك كانت معادلة لاجرانج الثانية المصاحبة للإحداثي q_2 تصبح كالتالي:

$$\therefore (m_3-m_2)\ddot{q}_1+(m_2+m_3)\ddot{q}_2=-(m_3-m_2)g \qquad (5)$$

المعادلتان (٤)، (٥) هما معادلتا الحركة في هذه الحالة.

إيجاد دالة هاملتون:

$$H = T + V$$

$$H = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\dot{q}_1^2 + (m_3 - m_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + \tfrac{1}{2}(m_2 + m_3)\dot{q}_2^2$$
$$+ (m_2 + m_3 - m_1)gq_1 + (m_2 - m_3)gq_2$$
$$- (m_2\ell_1 + m_3\ell_1 + m_3\ell_2)g \qquad (6)$$

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_1}$$

$$p_1 = (m_1 + m_2 + m_3)\dot{q}_1 + (m_3 - m_2)\dot{q}_2 \qquad (7)$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_2}$$

$$p_2 = (m_3 - m_2)\dot{q}_1 + (m_2 + m_3)\dot{q}_2 \qquad (8)$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1}$$

$$\dot{p}_1 = (m_2 + m_3 - m_1)g \qquad (9)$$

بتفاضل (٧) نجد أن:

$$\dot{p}_1 = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{q}_1 + (m_3 - m_2)\ddot{q}_2 \qquad (10)$$

من (٩)،(١٠) نجد أن:

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{q}_1 + (m_3 - m_2)\ddot{q} = -(m_2 + m_3 - m_1)g \quad (11)$$

وهي نفس معادلة لاجرانج الأولى رقم (٤).

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2}$$

$$\dot{p}_2 = -(m_2 - m_3)g \qquad (12)$$

بتفاضل (٨) بالنسبة للزمن نجد أن:

$$\dot{p}_2 = (m_3 - m_2)\ddot{q}_1 + (m_2 + m_3)\ddot{q}_2 \qquad (13)$$

ومن (١٢)، (١٣) نجد أن:

$$(m_3 - m_2)\ddot{q}_1 + (m_2 + m_3)\ddot{q}_2 = -(m_2 - m_3)g \qquad (14)$$

وهذه نفس معادلة لاجرانج الثانية (٥).

أخيرا إيجاد القوى المعممة:

$$Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial q_1} = = -(m_2 + m_3 - m_1)g$$

$$Q_2 = -\frac{\partial V}{\partial q_2} = -(m_3 - m_2)g$$

مثال ١١:

إذا كانت دالة لاجرانج لمنظومة ميكانيكية هي:

$$L = \frac{1}{2}k(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) + g\cos\theta$$

فأوجد: دالة هاملتون - معادلات هاملتون ثم أثبت أن:

$$\dot{\theta}^2 + \frac{c^2}{\sin^2\theta} - \frac{2g}{k}\cos\theta = \text{const.}$$

الحل

معطى لنا في هذا المثال دالة لاجرانج على الصورة التالية:

$$L = \frac{1}{2}k(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) + g\cos\theta \qquad (1)$$

كمية الحركة المعممة تعرف كالتالي: $p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}$ ومنها نجد أن:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \Rightarrow p_1 = k\dot{\theta} \quad , \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \Rightarrow p_2 = k\dot{\phi}\sin^2\theta \qquad (2)$$

ومنها يمكن الحصول على السرعات المعممة بدلالة كميات الحركة المعممة كالتالي:

$$\dot{\theta} = \frac{p_1}{k} \quad , \quad \dot{\phi} = \frac{p_2}{(k\sin^2\theta)} \qquad (3)$$

دالة هاملتون تعرف كالتالي: $H = \sum p_s \dot{q}_s - L$ ومنها نجد أن:

$$H = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - L \quad (4)$$

وبحذف السرعات المعممة منها والاختصار نحصل على:

$$H = \frac{1}{2}\frac{p_1^2}{k} + \frac{1}{2}\frac{p_2^2}{(k\sin^2\theta)} - g\cos\theta \quad (5)$$

معادلات هاملتون تصبح:

$$\dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}, \qquad \dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \Rightarrow \dot{p}_1 = g\sin\theta + \frac{1}{k}\frac{p_2^2\tan\theta}{\sin^2\theta} \quad (6)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \quad (7)$$

من المعادلتين (٢) و(٦) نحصل على:

$$k\ddot{\theta} = g\sin\theta + \frac{k}{k}\dot{\phi}^2\sin^4\theta\frac{\tan\theta}{\sin^2\theta}$$

التي يمكن أن تختصر إلى الصورة التالية:

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{k}\sin\theta + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\tan\theta \quad (8)$$

من المعادلتين (٣) و (٧) نحصل على:

$$k(\ddot{\phi}\sin^2\theta + 2\dot{\phi}\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}) = 0$$

مثال ١٢:

إذا كانت دالة لاجرانج لنظام ميكانيكي معطى بالعلاقة(k ثابت):

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + q_1^2\dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}k^2q_1^2$$

أثبت أن: $q_1^2 = A\sin(2kt + B) + C$ حيث A, B, C ثوابت.

الحـل

لإيجاد معادلات لاجرانج نوجد:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = \ddot{q}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = q_1\dot{q}_2^2 - k^2 q_1$$

إذا معادلة لاجرانج الأولى تصبح: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_1}$

$$\ddot{q}_1 - q_1\dot{q}_2^2 + k^2 q_1 = 0 \qquad (1)$$

وبالمثل:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = q_1^2\dot{q}_2, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = q_1^2\ddot{q}_2 + 2\dot{q}_1 q_1 \dot{q}_2^2$$

∴ معادلة لاجرانج الثانية تصبح: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_2}$

$$\frac{d}{dt}(q_1^2\dot{q}_2) = 0 \qquad (2)$$

ومن المعادلة (٢) نجد أن:

$$q_1^2\dot{q}_2 = \lambda^2 \Rightarrow \quad \dot{q}_2 = \frac{\lambda^2}{q_1^2} \qquad (3)$$

من (٣) في (١) نحصل على:

$$\ddot{q}_1 - \lambda^2 q_1^{-3} + k^2 q_1 = 0 \qquad (4)$$

بضرب طرفي المعادلة السابقة (٤) في $2\dot{q}_1$ نجد أن:

$$2\dot{q}_1\ddot{q}_1 - 2\lambda^2 q_1^{-3}\dot{q}_1 + 2k^2 q_1\dot{q}_1 = 0 \qquad (5)$$

والمعادلة (٥) السابقة يمكن وضعها على الصورة:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_1^2\right)+\frac{d}{dt}\left(\lambda^2 q_1^{-2}\right)+\frac{d}{dt}\left(k^2 q_1^2\right)=0$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن:

$$\dot{q}_1^2+\lambda^2 q_1^{-2}+k^2 q_1^2=C_1 \qquad (6)$$

بضرب طرفي المعادلة (٦) في q_1^2 نجد أن:

$$q_1^2\dot{q}_1^2+\lambda^2+k^2 q_1^4=C_1 q_1^2$$

$$q_1\dot{q}_1=\sqrt{C_1 q_1^2-k^2 q_1^4-\lambda^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}q_1^2\right)=k\sqrt{\frac{C_1}{k^2}q_1^2--q_1^4-\frac{\lambda^2}{k^2}}$$

بوضع $q_1^2=x$ نجد أن:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x\right)=k\sqrt{\frac{C_1}{k^2}x-x^2-\frac{\lambda^2}{k^2}}$$

وبوضعها على صورة إكمال مربع وفصل المتغيرات والتكامل نجد أن:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{A^2-(x-c)^2}}=2k\int dt$$

حيث:

$$C=\frac{c_1}{2k^2}, \qquad A^2=\frac{c_1^2}{4k^4}-\frac{\lambda^2}{k^2}$$

$$\sin^{-1}\frac{(x-c)}{A}=(2kt+B)$$

$$\frac{x-c}{A}=\sin(2kt+B)\Rightarrow \quad x=A\sin(2kt+B)+C$$

$$\therefore q_1^2=A\sin(2kt+B)+C$$

ملاحظة:

المعادلة (٤) يمكن وضعها على صورة معادلة غير متجانسة وحل المعادلة المتجانسة هو حل معادلة حركة توافقية بسيطة.

مثال ١٣:

جسيم كتلته m يتحرك في مجال قوة جهدها V أكتب في الإحداثيات الكروية (r,θ,ϕ) ، أوجد: أ- دالة هاملتون. ب- معادلات هاملتون.

الحل

أ) طاقة الحركة في الإحداثيات الكروية هي:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) \qquad (1)$$

عندئذ تكون دالة لاجرانج هي: $L = T - V$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta + \dot{\phi}^2) - V(r,\theta,\phi) \qquad (2)$$

ومن تعريف كمية الحركة المعممة يكون:

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \\ p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi} \end{aligned} \qquad (3)$$

ومنها نجد أن:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{(mr^2)}, \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{(mr^2\sin^2\theta)} \qquad (4)$$

دالة هاملتون تصبح: $H = \sum_{s=1}^{n} p_s\dot{q}_s - L$

$$\therefore H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\phi\dot{\phi} - \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) + V(r,\theta,\phi)$$

وعلى ذلك تصبح دالة هاملتون كدالة في كميات الحركة المعممة على الصورة التالية:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + V(r,\theta,\phi) \qquad (5)$$

إيجاد معادلات هاملتون يتم كالتالي: $\dot{p}_s = -\dfrac{\partial H}{\partial q_s}$, $\quad \dot{q}_s = \dfrac{\partial H}{\partial p_s}$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \qquad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\theta}$$

مثال ١٤:

تتحرك نقطة مادية في المستوى x y تحت تأثير قوة جذب مركزية تعتمد فقط على بعد النقطة عن نقطة الأصل. والمطلوب :

(أ) إيجاد دالة هاملتون (ب) معادلات هاملتون. (جـ) إثبات أن $H = E$

الحـل

باستخدام الإحداثيات القطبية (r,θ) وبفرض أن دالة الموضع هي $V(r)$ فإن

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right), \quad L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r)$$

حيث $V = -\int \underline{F}\,.\,d\,\underline{r}$

إذن دالة لاجرانج دالة في $L(r,\dot{r},\dot{\theta})$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2\dot{\theta} \quad \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2}$$

$$H = H(r,p_r,p_\theta) = \sum p_\alpha\,\dot{q}_\alpha - L$$

$$H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} - \left[\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r)\right]$$

دالة هاملتون ستكون:
$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r)$$

(ب) معادلات هاملتون هي :

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad , \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^2} - V'(r)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \;\Rightarrow\; p_\theta = mr^2\dot{\theta} = \text{const} = h$$

(جـ) إثبات أن $H = E$ بما أن

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \;\Rightarrow T = \frac{m}{2}\left(\frac{p_r^2}{m^2} + \frac{p_\theta^2}{m^2 r^2}\right) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2}$$

$$E = T + V = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V = H$$

مثال ١٥:

أوجد باستخدام معادلات هاملتون معادلات حركة جسيم يتذبذب حركة توافقية بسيطة.

الحل

حيث أن الجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة فإن :

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad , V = \frac{1}{2}kx^2 \;, \; k = \text{const.}$$

إذن دالة لاجرانج هي:
$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

دالة هاملتون يجب كتابة $\dot{x}$ بدلالة p_x

$$\because\ p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

$$\because T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{p_x^2}{2m}$$

ومن ثم: $H = H(x, p_x) = T + V = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2} k x^2$

ومن معادلات هاملتون يكون

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \quad \text{أو} \quad p_x = m\dot{x}$$

$$-\dot{p}_x = \frac{\partial H}{\partial x} = k x \quad \text{أو} \quad \dot{p}_x = -k x$$

من p_x ، $\dot{p}_x$ يكون: $m\ddot{x} = -k x$ وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة.

مثال ١٦:

معطى لك دالة لاجرانج لنقطة مادية تتحرك في الصورة

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \omega^2 x^2 = \alpha x^2 + \beta x \dot{x}$$

حيث α, β, ω ثوابت أوجد دالة هاملتون.

الحل

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x}\,(1 + \beta x) \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{1 + 2\beta x}$$

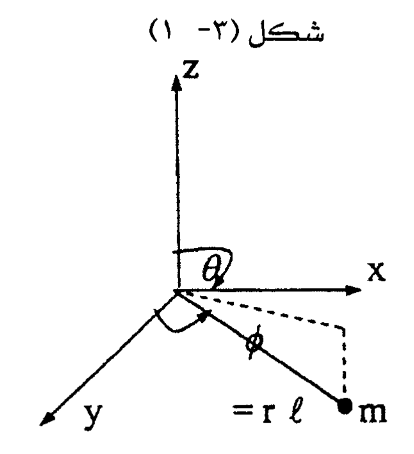
$$H = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{1 + 2\beta x} - \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{1 + 2\beta x}\right)(1 + 2\beta x) + \alpha x^2 + \frac{\omega^2 x^2}{2}$$

$$H = \alpha x^2 + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{p^2}{1 + 2\beta x}$$

وهذه دالة في x، p

مثال ١٧ : أوجد معادلات هاملتون في حالة البندول الكروي.

الحل



البندول الكروي عبارة عن خيط طوله ℓ مثبت طرفه وطرفه الآخر به كتلة m. يمكن أن تتحرك هذه الكتلة على سطح كرة مركزها الطرف الثابت ونصف قطرها ℓ .

الإحداثيات المعممة هي θ, ϕ حيث θ هي الزاوية بين الخيط والرأسي لأعلى خلال الطرف الثابت للخيط والذي هو المحور z، ϕ هي الزاوية بين مستقيم أفقي ثابت يمر خلال الطرف الثابت (محور x) ومسقط الخيط على مستو أفقي مار بالمحور x.

طاقة الحركة T:

$$T = \frac{1}{2} m \left(\ell \dot{\theta}^2 + \ell^2 \sin^2 \theta \, \dot{\phi}^2 \right)$$

طاقة الوضع :

$$V = - m g \ell (\pi - \theta) = m g \ell \cos \theta$$

إذا دالة لاجرانج ستكون:

$$L = T \quad V$$

$$L = \frac{m \ell^2}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \, \dot{\phi}^2 \right) - m g \ell \cos \theta$$

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m \ell^2 \dot{\theta} \ , \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m \ell^2 \sin^2 \theta \, \dot{\phi}$$

$$\therefore \ \dot{\theta} = \frac{p_1}{m \ell^2} \quad , \qquad \dot{\phi} = \frac{p_2}{m \ell^2 \sin^2 \theta}$$

دالة هاملتون ستكون: $H = T + V = H(q_\alpha, p_\alpha)$

$$= \frac{p_1^2}{2m\ell^2} + \frac{p_2^2}{2m\ell^2 \sin^2\theta} + m g \ell \cos\theta$$

معادلات هاملتون تكون: $\dot{p}_1 = \frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_2 \cos\theta}{m\ell^2 \sin^3\theta} + m g \ell \sin\theta$

$$\dot{p}_2 = 0$$

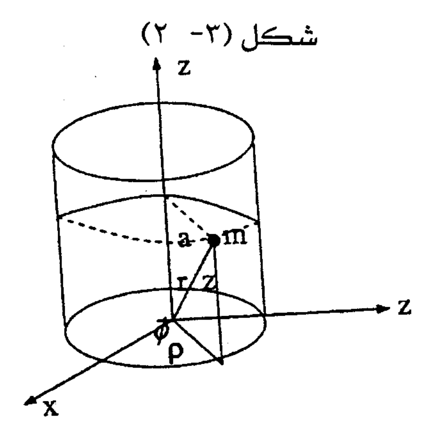
$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m\ell^2} \quad , \quad \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m\ell^2 \sin^2\theta}$$

مما سبق يتضح أن ϕ هو إحداثي مهمل أي أن ثابت= p_2 وهي التي تمثل ثبوت كمية الحركة الزاوية حول المحور z.

مثال١٨ :
جسيم كتلته m يتحرك على السطح المنحني لاسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها a تحت تأثير قوة جذب نحو نقطة الأصل تتناسب مع بعد الجسيم عند نقطة الأصل.

الحل

شكل (٣- ٢)



يمكن استخدام الإحداثيات الأسطوانية (ρ, ϕ, z) أو الكارتيزية (x, y, z) لاحظ أن

$$|\vec{r}| = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (1)$$

$$\vec{F} = -k\,\vec{r} \qquad (2)$$

معادلة القيد $x^2 + y^2 = a^2$

$$\because \ \rho = a \ , \ \dot{\rho} = 0$$

فإن طاقة الحركة تعطى من:

$$T = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right)$$

$$T=\frac{1}{2}m\left(a^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2\right) \qquad (3)$$

طاقة الجهد (من المعادلة (١)):

$$V=\frac{1}{2}k\,r^2=k\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$V=\frac{1}{2}k\left(a^2+z^2\right) \qquad (4)$$

دالة لاجرانج :

$$L=T-V=L\left(z,\dot{\phi}+\dot{z}\right)$$

$$L=\frac{1}{2}m\left(a^2\,\dot{\phi}^2+\dot{z}^2\right)-k\left(a^2+z^2\right) \qquad (5)$$

من المعادلة (٥) نوجد $\dot{\phi}$ بدلالة p_ϕ ، $\dot{z}$ بدلالة p_z ويكون كالآتي :

$$p_\phi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}=m\,a^2\,\dot{\phi}\ \Rightarrow\dot{\phi}=\frac{p_\phi}{m\,a^2} \qquad (6)$$

$$p_z=\frac{\partial L}{\partial z}=m\,\dot{z}\ \Rightarrow\dot{z}=\frac{p_z}{m} \qquad (7)$$

بالتعويض في المعادلة (٣) نحصل على

$$T=\frac{1}{2}m\left[a^2\left(\frac{p_\phi}{m\,a^2}\right)^2+\left(\frac{p_z}{m}\right)^2\right]\Rightarrow T=\frac{1}{2\,m}\left[\frac{p_\phi^2}{a^2}+p_z^2\right]$$

دالة هاملتون تعطى من:

$$H=T+V$$

$$H=H\left(z,\phi,p_\phi,p_z\right)$$

$$H=\frac{p_\phi^2}{2\,m\,a^2}+\frac{p_z^2}{2\,m}+\frac{1}{2}k\left(a^2+z^2\right) \qquad (8)$$

إذن معادلات هاملتون ستكون:

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\dot{p}_\alpha \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha$$

والإحداثيات المعممة z, ϕ, p_z, p_ϕ نجد أن :

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \Rightarrow p_z = m\dot{z} \qquad (9)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \frac{p_\phi}{m a^2} \Rightarrow p_\phi = m a^2 \dot{\phi} \qquad (10)$$

$$-\dot{p}_z = \frac{\partial H}{\partial z} = k z \Rightarrow \dot{p}_z = -k z \qquad (11)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow p_\phi = \text{const.} \qquad (١٢)$$

من المعادلة (٩)، (١١) نجد أن :

$$m\ddot{z} = -k z$$

∴ حركة الجسيم في اتجاه محور z هي حركة توافقية بسيطة.

من المعادلة (١٠)، (١٢) نحصل على

$$p_\phi = \text{const.} = m a^2 \dot{\phi}$$

أي أن العزم الزاوي حول محور z يساوي ثابت وهو واضح حيث محور z هو محور تماثل وأن H لا تحتوي على الإحداثي المعمم ϕ .

مثال ١٩:

جسيم كتلته m يتحرك في مجال قوة دالة الجهد V. أوجد دالة هاملتون ومعادلات هاملتون في الإحداثيات القطبية الكروية (r, θ, ϕ) للجسيم.

الحل

طاقة الحركة في الإحداثيات الكروية تعطى من :

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2)$$

ستكون دالة لاجرانج

$$L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)\ - V(r,\theta,\phi)$$

من دالة لاجرانج نوجد السرعات المعممة بدلالة كميات الحركة المعممة كما يلي :

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\,\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m},\quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\,r^2\,\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m\,r^2}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\,r^2 \sin^2\theta\,\dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m\,r^2 \sin^2\theta}$$

وبالتالي دالة هاملتون هي :

$$H = \sum_\alpha p_\alpha\,\dot{q}_\alpha - L$$

$$H = p_r\,\dot{r} + p_\theta\,\dot{\theta} + p_\phi\,\dot{\phi} - \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2)$$
$$+ V(r,\theta,\phi)$$

ثم بالتعويض عن $\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ بدلالة p_r, p_θ, p_ϕ نحصل على

$$H = \frac{p_r^2}{2\,m} + \frac{p_\theta^2}{2\,m\,r^2} + \frac{p_\phi^2}{2\,m\,r^2 \sin^2\theta} + V(r,\theta,\phi)$$

يلاحظ أن الدالة H كان يمكن إيجادها مباشرة من تساويها بالطاقة الكلية حيث أن النظام هنا من الأنظمة المحافظة:

أي إن

$$H = T + V$$

معادلات هاملتون:

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha},\quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \Rightarrow \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \frac{p_r}{m} \Rightarrow p_r = m\,\dot{r}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{m\,r^2 \sin^2\theta} \Rightarrow p_\phi = m\,r^2 \sin^2\theta\ \dot{\phi}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_\theta^2}{m\,r^3} + \frac{p_\phi^2}{m\,r^2 \sin^2\theta} - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2 \cos\theta}{m\, r^2 \sin^2\theta} - \frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad \dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

يلاحظ أن V لا تعتمد على الإحداثي المعمم ϕ ومن ثم كذلك الدالة H وفي هذه الحالة يكون $\dot{p}_\phi = 0$ ومنها $p_\phi = \text{const.}$ ويكون العزم الدوراني p_ϕ هو ثابت الحركة.

تمارين

١- جسيم كتلته m يتحرك في مجال قوة جهد V.

أ) أكتب دالة هاملتون. ب) معادلات هاملتون في الإحداثيات المتعامدة (x, y, z)

٢- استخدم معادلات هاملتون لدراسة حركة جسيم كتلته m على مستوي مائل أملس زاويته α.

٣- باستخدام معادلات هاملتون حل مسألة المذبذب التوافقي في:

أ) بعد واحد ب) بعدين جـ) ثلاثة أبعاد

٤) إذا كانت دالة لاجرانج لمنظومة ميكانيكية هي:

$$L = (k + \frac{1}{2})\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 - \frac{n^2}{2}(k+1)q_1^2 - \frac{n^2}{2}q_2^2$$

أ- اكتب معادلات لاجرانج للحركة ب- أثبت أن: $q_1 - q_2 = A\cos(N + B)$

حيث A, B, N, k, n كميات ثابتة. وأن: $N^2 k = (k+1)n^2$

جـ- أوجد حل معادلات الحركة المستنتجة أي أوجد: $q_1(t), q_2(t)$.



مبدأ هاملتون

Hamilton's principle

* مقدمة
* مبدأ هاملتون للتأثير الأقل (أو الفعل الأقل)
* قاعدة(مبدأ) هاملتون
* استنتاج معادلات لاجرانج من مبدأ هاملتون
* أمثلة وتمارين

الفصل الرابع
مبـدأ هاملتون
Hamilton's principle

مقدمة:

عندما تم استنتاج معادلات لاجرانج استخدمنا تعريف طاقة الحركة المستنتجة من قوانين نيوتن للحركة وفي هذا الجزء سوف نتعرض لطريقة أخرى لاستنتاج معادلات لاجرانج. هذه الطريقة تستند على فرضية أثبتت شموليتها بنتائجها. وتظهر في فرع الرياضيات المعروف بحساب التغاير أو التباين .

٤-١ مبدأ هاملتون للتأثير الأقل (أو الفعل الأقل) حساب التغاير (التباين) Calculus of Variation

من المسائل الشهيرة والأكثر شيوعاً في الرياضيات في حساب التغايير هي مسألة إيجاد المنحنى y(x) الذي يصل بين النقطتين x = a ، x = b بحيث يكون التكامل

$$I=\int_a^b F(x, y, y')\,dx = \text{Extremum} \qquad (1)$$

أي يكون I نهاية عظمى أو صغرى (Extremum) حيث $y'=\frac{dy}{dx}$ والدالة F هي دالة في x بصرف النظر عن تركيبها بالشكل السابق والتي تعتمد على الموضع على المنحنى y(x) وميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة y'(x) وأن للدالة F قيم عددية مختلفة للتكامل I باختلاف المنحنى $y(x)$ ، والمطلوب البحث عن منحنى معين $y(x)$ بجعل قيمة التكامل I قيمة قصوى (نهاية عظمى أو صغرى) وإن أمكن الحصول على ذلك المنحنى فإنه يسمى المنحنى الأقصى Extremal. وكما سنرى أن الشرط الضروري لذلك هو أن تتحقق معادلة أويلر

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=0 \qquad (2)$$

ولإثبات ذلك نفرض أن منحنى y أزيح إلى نقطة أخرى أي حدث له تغير بمقدار صغير فإن :

$$\because \quad I = \int F\, dx \qquad (3)$$

$$\therefore \quad \delta I = \int \delta F\, dx$$

ولكن

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y$$

بالتعويض في δI واستخدام التكامل بالتجزيء نحصل على

$$0 = \delta I = \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y \Big|_a^b - \int \delta y \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} \right] dx \qquad (4)$$

وعند $x = a$, $x = b$ يكون الزيادة الحادثة في y تساوي صفر (أي أن $\delta y = 0$ عند كل من a,b)، فإن الحد الأول ينعدم وينتج

$$0 = \delta I = \int \delta y \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} \right] dx \qquad (5)$$

وحيث أن δy اختيارية فإن

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad (6)$$

ويمكن تعميم هذه النتيجة للفراغ متعدد الأبعاد حيث

$$I = \int_a^b F(x_1, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)\, dx$$

ويكون الشرط الضروري لكي يكون التكامل نهاية عظمى أو صغرى هو تحقق معادلة أويلر في الصورة

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_\alpha}\right)-\frac{\partial F}{\partial y_\alpha}=0, \qquad \alpha=1,2,3,.....,n \tag{7}$$

ما هو الشرط الضروري لكي يكون التكامل

$$\mathbf{I}=\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{y}',\mathbf{y}'')\,d\,\mathbf{x} \tag{8}$$

نهاية قصوى (عظمى أو صغرى)؟

نتبع نفس الأسلوب السابق في إيجاد δI وحساب δF حيث $F=F(x,y,y',y'')$ داخل التكامل فيكون الشرط هو:

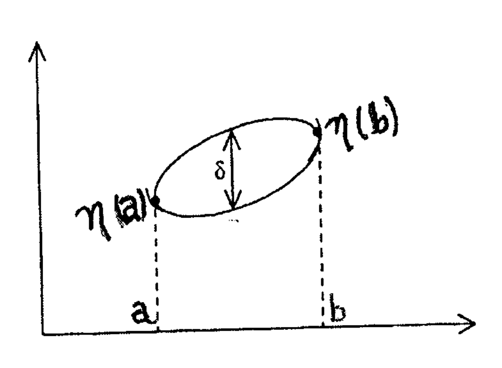
$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)=0 \tag{9}$$

وعموماً إذا كانت $F(x,y,y',...,y^n)$ فإن الشرط هو :

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+...+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^n}\right)=0 \tag{10}$$

إذا كان مطلوب المنحنى الذي يجعل التكامل I له نهاية عظمى وبحيث يكون التكامل $\int_a^b G(x,y,y')\,dx$ مساوياً مقدار ثابت. هذا التكامل الأخير يمثل قيد وهو أن التكامل يساوي ثابت وهذا الشرط مثل القيود أو الحالات المقيدة في معادلات لاجرانج غير أن ذلك باعتبار التكامل المتكون مع إضافة التكامل

شكل (٤- ١)



$\int_a^b F(x,y,y')dx$ إلى $\lambda\int_a^b G(x,y,y')dx$ حيث λ معامل لاجرانج فيصبح التكامل الناتج هو

$$\int_a^b (F+\lambda G)\,dx = \int_a^b \xi\,dx \tag{11}$$

وهذا التكامل يكون له نهاية قصوى إذا تحقق

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y'}\right) - \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \tag{12}$$

حيث $\xi = \lambda G + F$

<u>طريق أخرى</u> لتعيين معادلة المنحنى $y=y(x)$ الذي يصل بين نقطتين a,b بحيث أن التكامل $I = \int_a^b F(x,y,y')dx$ نهاية قصوى(عظمى أو صغرى) ، ولاثبات أن الشرط الضروري لكي يكون التكامل نهاية قصوى هو أن (معادلة أويلر)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

تكون محققه . ولاثبات ذلك نفرض أن $\eta(x)$ متغير كما بالرسم وبفرض حدوث إزاحة $\varepsilon\eta$ فى اتجاه y فيكون المنحى الذي يجعل للتكامل نهاية هو

$y = Y(x)$ في الفترة $a \le x \le b$

والمنحنى المجاور له والمار بالنقطتين a,b هو

$$y = Y + \varepsilon\eta$$

حيث $\eta(a) = \eta(b) = 0$ و ε ثابت لا يعتمد على x أي

$$y' = Y' + \varepsilon\eta'$$

ومن ثم يكون

$$I = I(\varepsilon) = \int_a^b F(x, Y + \varepsilon\eta, Y' + \varepsilon\eta')dx$$

نطبق شرط وجود النهاية وهو $\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$ ومن ثم بالتفاضل نحصل على

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_a^b (0 + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \varepsilon})dx = \int_a^b (\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta')dx$$

بالتكامل بالتجزيء للحد الثاني من التكامل وتطبيق الشروط $\eta(a) = \eta(b) = 0$ فنحصل على

$$\int_a^b (\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})\eta)dx = 0$$

وحيث أن η اختياري فيكون

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

وهو الشرط الضروري لكي يكون التكامل I له نهاية قصوى.

تعيين معادلة أويلر والشروط والكافية

$$\because \quad I = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

$$I + \delta I = \int_a^b F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta')dx$$

باستخدام مفكوك ماكلورين

$$F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') = F(x, y, y') + \varepsilon(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta') + \frac{\varepsilon^2}{2}(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\eta^2$$
$$+ 2\eta\eta'\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\eta'^2) + o(\varepsilon^3)$$

بالتعويض في من المفكوك في التكامل نحصل على

$$\delta I = \varepsilon I_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} I_2 + o(\varepsilon^3)$$

ولكي يكون I قيمة عظمى الشرط الكافي لذلك $I_2 < 0$, $I_1 = 0$ ولكي يكون قيمة صغرى هو $I_2 > 0$, $I_1 = 0$

والشرط $I_1 = 0$ يعطى

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta\right) dx = 0$$

ومنها ينتج معادلة أويلر

٤-٢ قاعدة(مبدأ) هاملتون Hamilton's Principle

من دراستنا للميكانيكا رأينا أنها تعتمد على قوانين نيوتن وكذلك في اشتقاق معادلات لاجرانج لحركة منظومة ديناميكية استخدمنا قانون نيوتن الثاني . سنرى هنا انه توجد طريقة أخرى لاشتقاق معادلات لاجرانج(التشابه الواضح بين المعادلة (٢) ومعادلات لاجرانج يساعد على دراسة مسألة منحنيات النهاية العظمى أو النهاية الصغرى للتكامل التالي). والتي تعتمد على قاعدة هاملتون للتغايير Hamilton's Variational Principle والتي تنص على أن حركة أي منظومة من عدة جسيمات أو حتى جسيم واحد تحدث بشرط أن التكامل

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_n, t)dt$$

يكون نهاية عظمى أو صغرى حيث $L = T - V$ دالة لاجرانج للنظام الديناميكي .

وكما بينا سابقا أن التغير الذي يحدث هو أن التكامل السابق يكون نهاية عظمى أو صغر ى إذا كان:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0$$

حيث δ ترمز للتغير الصغير وهذا التغير ينتج من اخذ مسارات مختلفة للتكامل بتغير الإحداثيات والسرعات المعممة كدوال في الزمن t .

٤-٣ استنتاج معادلات لاجرانج من مبدأ هاملتون :

مبدأ هاملتون كما ذكرنا سابقاً ينص على أن أي مجموعة ديناميكية هولونومية ذات الإحداثيات المعممة q_α حيث $\alpha = 1, ..., n$ إذا علمت الشروط الابتدائية للحركة فإن q_α تكون دوال وحيدة في الزمن $q_\alpha = q_\alpha(t)$ وفي أثناء تحرك المجموعة في الفراغ ترسم مساراً فيه والذي يحقق قانون نيوتن الثاني ومعادلات لاجرانج. والمعادلات q_α يمكن اعتبارها معادلات بارامترية وتمثل معادلات المسار ، هذا ويجدر بنا أن نقارن هذا المسار الحقيقي بمساراً آخر مجاور لا يحقق قانون نيوتن الثاني ولا معادلات لاجرانج ولكن له نفس نهايتي المسار الحقيقي بمعنى أن المسارين قد يتقاطعا في نفس الزمن $(t_2 - t_1)$ مثلاً وذلك حتى يمكن استنتاج شرطاً رياضياً للمسار الحقيقي.

وينص مبدأ هاملتون للفعل الأقل على أن تكامل الحركة (Action Integral) الآتي

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L \, d t = 0 \quad \text{or} \quad \delta \int_{0}^{\tau} L \, d t = 0 \qquad (13)$$

يكون نهاية عظمى أو صغرى (في معظم الأحوال نهاية صغرى) وذلك لأي مسار حقيقي ممثل للحركة إذا ما قورن بمسار آخر مجاور بحيث $L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$ دالة لاجرانج. أي سنفرض أن دالة لاجرانج دالة في الإحداثيات المعممة q_α والسرعات المعممة $\dot{q}_\alpha$.

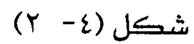
مما سبق الشرط اللازم لكي يكون للتكامل السابق نهاية قصوى وهو تحقق

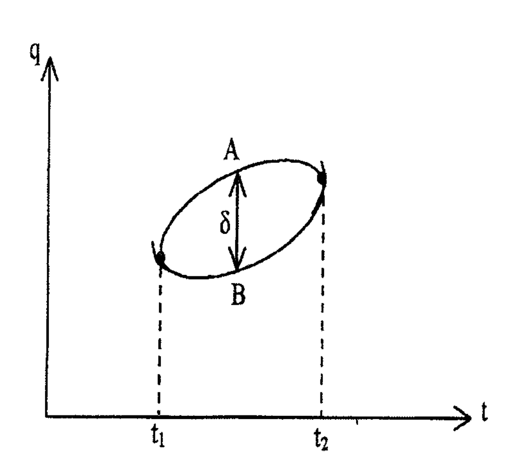
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0 \qquad (14)$$

والمعادلة (14) هي بالضبط معادلة لاجرانج.

❖ **ملاحظة**

ويبين مبدأ هاملتون أنه إذا أجرى التكامل الخطى على دالة لاجرانج وعلى جميع المسارات التي تصل بين النقطتين t_2, t_1 فإن أحد هذه المسارات (وهو واحد فقط) ينتج قيمة صغرى ويكون هذا المسار هو المسار الحقيقي للمنظومة.


شكل (٤- ٢)



وحتى يمكننا دراسة نتائج هذا المبدأ فإنه يجب مقارنة قيم تكامل الفعل على جميع المسارات القريبة من المسار الحقيقي والمارة بنفس نقطتي البداية t_1 والنهاية t_2 وهذا يدخلنا فيما يسمى حساب التغاير Calculus of variations

مثال١:

أثبت أنه لكي يكون للتكامل التالي:

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt \qquad (1)$$

قيمة قصوى لابد أن يحقق الشرط التالي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad (2)$$

الحل

بتطبيق مبدأ التغاير على المعادلة (١) على فرض أن L هي دالة معروفة بدلالة الإحداثيات المعممة q_k والسرعات المعممة $\dot{q}_k$ وسوف نثبت هذا المثال في حالة إحداثي معمم واحد ويمكن بسهولة تعميم النتيجة بعد ذلك، إذا:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}\right)dt \qquad (3)$$

وبملاحظة أن:
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right) - \delta q \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$$

والآن δq تساوى الفرق بين دالتين للزمن t ومختلفين قليلا إذن:

$$\delta \frac{d}{dt} q = \frac{d}{dt}\delta q$$

فإنه يمكن كتابة التكامل (٣) على الصورة:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right) - \delta q \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right] dt$$

وبمكاملة الحد الثاني في الطرف الأيمن نجد أن:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Big]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q dt$$

ولأن جميع المسارات تبدأ وتنتهي عند نفس النقطتين أي نقطتي بداية ونهاية المسار تبقى ثابتة إذن الحد الأول من الطرف الأيمن يتلاشى ، وكذلك لأن: $\delta q\big|_{t_1} = \delta q\big|_{t_2} = 0$ حيث أنه لا يوجد عند t_2, t_1 أي تغيير في الدالة q والمعادلة السابقة تصبح:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q dt = 0$$

والآن حيث جميع المتغيرات δq مستقلة فإن شرط تحقيق هذه المعادلة يصبح كالتالي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

وهذه هي معادلة لاجرانج وهي تمثل الشرط المطلوب:

❖ ملاحظات:

١) تم استنتاج معادلة لاجرانج لمنظومة ميكانيكية لها إحداثي معمم واحد وفي الحقيقة فإنه يمكن أيضا استنتاج معادلات لاجرانج باستخدام نفس المبدأ السابق "مبدأ هاملتون" إذا كان للمنظومة الميكانيكية أكثر من إحداثي معمم واحد.

٢) في حالة وجود أكثر من إحداثي معمم واحد فإنه التغاير لأي دالة مثلا $F(q,\dot{q},t)$ يمكن كتابته كالتالي:

$$\delta F(q,\dot{q},t) = F(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t) - F(q,\dot{q},t)$$

ويمكن بعد ذلك استخدام مفكوك تايلور للحصول على تعميم النتيجة السابقة.

مثال٢:
أثبت أن أقصر مسافة بين نقطتين في مستوى هي الخط المستقيم الواصل بينهما

الحل

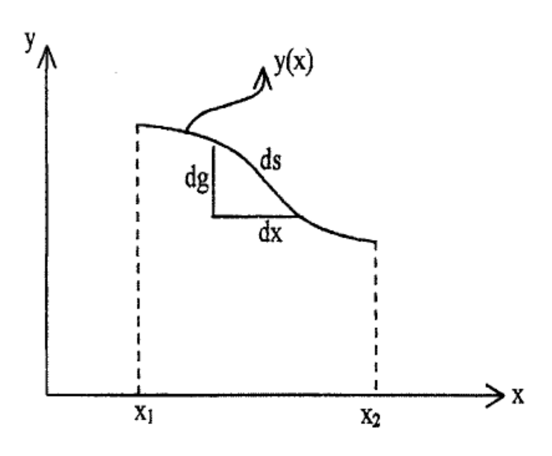
لنفرض أن الخط الذي يصل بين هاتين النقطتين هو المنحنى s المعطى بـ :

$$s = \int_{x_1}^{x_2} ds$$

وبما أن عنصر الطول من قوس يعطى بالعلاقة:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

شكل (٤- ٣)



$$ds = +\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$$

$$s = \int_{x_1}^{x_2} (\sqrt{1 + y'^2})dx$$

بفرض أن:
$$F = \sqrt{1 + y'^2}$$

وبما أن الشرط الضروري لكي يكون s نهاية صغرى هو:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{2}(1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} 2y'$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{const.} = c_1$$

بضرب الطرفين في الوسطين ثم التربيع نجد أن:

$$y'^2 = c_1^2(1 + y'^2) \quad \Rightarrow \quad y'^2 = c_1^2 + c_1^2 y'^2$$

$$y'^2 - c_1^2 y'^2 = c_1^2 \quad \Rightarrow \quad y'^2(1 - c_1^2) = c_1^2$$

والتي يمكن وضعها على الصورة التالية:

$$y'^2 = \frac{c_1^2}{1 - c_1^2} = a^2$$

ثم بأخذ الجذر التربيعي للطرفين والتكامل نجد أن:

$$y' = \pm a \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \pm a \quad \Rightarrow \quad dy = \pm a dx \quad \Rightarrow \quad y = \pm ax + b$$

وهذه معادلة خط مستقيم. وبالتالي نجد أن أقصر مسافة بين نقطتين في مستوى هو الخط المستقيم الواصل بينهما.

مثال ٣:
جسيم ينزلق من السكون عند نقطة ما على سلك أملس في مستوى رأسي إلى نقطة أخرى تحت تأثير الجاذبية. أوجد الزمن الذي يستغرقه في ذلك. ثم أثبت أنه إذا كان المطلوب هو أن يتحرك الجسيم بين النقطتين في أقل زمن ممكن فإن المعادلة التفاضلية للمنحنى c الذي يصل بين هاتين النقطتين هي:

$$1+y'^2+2yy''=0$$

وأن المعادلات البارامترية لهذا المنحنى هي:

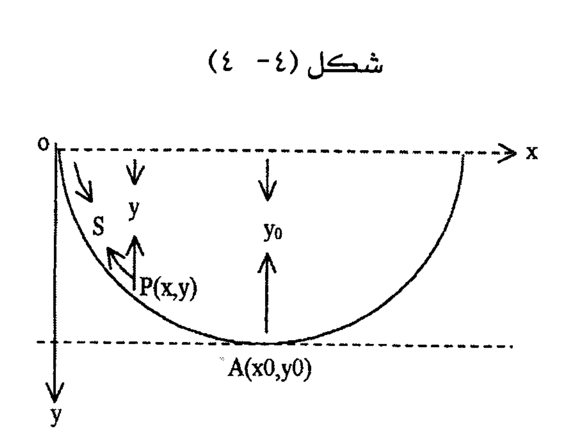
$$x=a(\phi-\sin\phi), \qquad y=a(1-\cos\phi)$$

حيث ϕ هو البارامتر، a ثابت.

الحل

نفرض شكل السلك كما هو موضح بالشكل ونفرض أن المحور x هو المحور الأفقي وأن محور y هو المحور الرأسي إلى أسفل. ونفرض أن نقطة الابتداء

شكل (٤- ٤)



والانتهاء مأخوذتان عند نقطة الأصل والنقطة $A(x_\circ,y_\circ)$ على الترتيب.

نفرض أن الجسيم عند أي لحظة زمنية t عند النقطة p التي احداثياتها x,y . وبفرض أن كتلة الجسيم هي m. وبفرض أن الخط الأفقي المار خلال A هو مستوى قياس الطاقة فيكون من مبدأ ثبوت الطاقة أن:

(طاقة الموضع + طاقة الحركة) = (طاقة الموضع + طاقة الحركة)

عند p عند o

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+mg(y_\circ-y)=0+mgy_\circ$$

حيث $\frac{ds}{dt}$ هي سرعة الجسيم عند اللحظة الزمنية t وبالاختصار نجد أن:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=2gy \quad\Rightarrow\quad ds=\sqrt{2gy}\,dt$$

إذن الزمن الكلى اللازم للذهاب من $y=0$ إلى $y=y_\circ$ هو:

$$T=\int_0^t dt=\int_{y=0}^{y=y_\circ}\frac{ds}{\sqrt{2gy}}$$

ولكن:

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2 \quad\Rightarrow\quad ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{y_\circ}\left(\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\right)dx$$

ولإيجاد المنحنى الذي يجعل T أقل ما يمكن نأخذ:

$$F=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y},\quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}=-\frac{1}{2}\left(1+y'^2\right)^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y'}=\left(1+y'^2\right)^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y'}\right)=-\left(1+y'^2\right)^{-\frac{3}{2}}y'^2y^{\frac{1}{2}}y''+(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}y''y^{-\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{1}{2}(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}y''^2y^{-\frac{3}{2}}$$

وبالتالي يكون:

$$-\left(1+y'^2\right)^{-\frac{3}{2}} y'^2 y^{-\frac{1}{2}} y'' + (1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} y'' y^{-\frac{1}{2}}$$
$$-\frac{1}{2}(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} y'^2 y^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}} = 0$$

$$\left(1+y'^2\right)^{-\frac{3}{2}} y^{-\frac{3}{2}}\Big[-y'^2 y'' y + \left(1+y'^2\right) y'' y$$
$$-\frac{1}{2}(1+y'^2) y'^2 + \frac{1}{2}(1+y'^2)^2\Big] = 0$$

وبعد الاختصار تصبح:

$$1+y'^2+2yy''=0 \qquad (❖)$$

وهو المطلوب.

ولحل هذه المعادلة التفاضلية نضع:

$$y'=u \quad , \quad y''=\frac{dy}{dx}=\frac{du\,dy}{dy\,dx}=u\frac{du}{dy}$$

إذا المعادلة التفاضلية (❖) تصبح:

$$1+u^2+2yu\frac{du}{dy}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y}+\frac{2u}{1+u^2}du=0$$

$$\ell in + \ell n(1+u^2) = \ell in \quad \Rightarrow \quad (1+u^2)y=b$$

$$u^2y=b-y \quad \Rightarrow \quad u^2=\frac{b-y}{y} \quad \Rightarrow \quad u=\sqrt{\frac{b-y}{y}}$$

$$y'=u=\sqrt{\frac{b-y}{y}} \quad \Rightarrow \quad dx=\frac{dy}{\sqrt{\frac{(b-y)}{y}}} \quad \Rightarrow \quad x=\int\sqrt{\frac{y}{b-y}}dy$$

Let $y=b\sin^2\theta \quad , \quad dy=2b\sin\theta\cos\theta d\theta$

$$x=2b\int\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta\sin\theta d\theta=2b\int\sin^2\theta d\theta$$

$$=2b(\frac{1}{2})\int(1-\cos2\theta)d\theta=\frac{1}{2}b(2\theta-\sin2\theta)+c$$

إذا المعادلات البارامترية المطلوبة هي:

$$x=\frac{1}{2}b(2\theta-\sin 2\theta)+c \quad , \quad y=b\sin^2\theta=(\frac{1}{2})b(1-\cos 2\theta)$$

وحيث أن $x = 0$ عند $y = 0$ إذن $c = 0$.

وبوضع $a=\frac{1}{2}b,\phi=2\theta$ نحصل على:

$$x=a(\phi-\sin\phi) \quad , \quad y=a(1-\cos\phi)$$

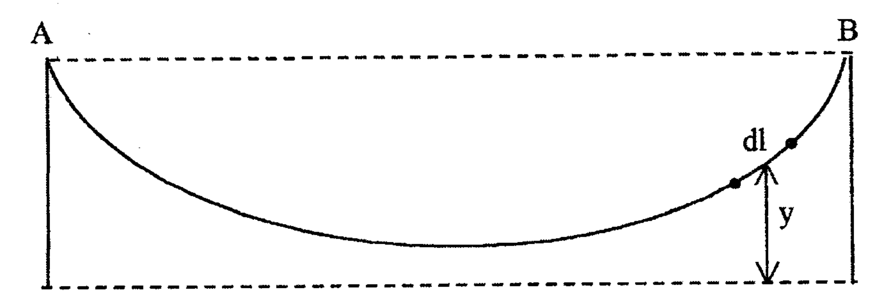
وهو المطلوب.

مثال ٤:

قضيب ثقيل منتظم مثبت عند طرفيه في خط أفقي واحد أوجد شكل المنحنى الذي يأخذه القضيب تحت تأثير قوة الجاذبية الأرضية.

الحل

شكل (٤- ٥)



من الواضح أن جميع أجزاء القضيب في حالة سكون وبذلك لا توجد طاقة حركة وتكون الطاقة الكلية E هي طاقة موضع فقط ومن الواضح كذلك فإن هذه الطاقة الكلية يجب أن تكون أقل ما يمكن لهذا السبب (أنها طاقة موضع فقط). نعتبر خط قياس الطاقة هو الخط الموضح بالرسم.

$$E=\int_A^B mgyd\ell \quad , \quad d\ell=\sqrt{(dx)^2=(dy)^2}=\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

بعد القسمة على الثابت mg

$$\delta E=0=\delta\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

وبذلك فيجب أن تحقق معادلة لاجرانج للدالة التالية:

$$F=y\sqrt{1+y'^2} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y}=y\sqrt{1+y'^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=\frac{y'^2+yy''}{\sqrt{1+y'^2}}-\frac{yy'+y'y''}{(\sqrt{1+y'^2})^3}$$

$$=\frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(y'^2+yy''\right)\left(1+y'^2\right)-yy'^2y''\right]$$

$$=\frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}[y'^2+yy''+y'^4]=\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$y'^2+yy''+y'^4=(1+y'^2)^2=1+2y'^2+y'^4$$

$$y''=1+y'^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2y'y''}{1+y'^2}=2y'\frac{1}{y}$$

$$\ell n(1+y'^2)=2\ell ny-\ell nb^2=\ell n\frac{y^2}{b^2}$$

$$1+y'^2=\frac{y^2}{b^2} \quad , \quad y'=\pm\sqrt{\frac{y^2}{b^2}-1} \qquad (*)$$

باستخدام التعويض التالي: $y=b\cosh\theta \quad , \quad dy=b\sinh\theta d\theta$

المعادلة (❖) تعطى:

$$b\sinh\theta\frac{d\theta}{dx}=\pm\sinh\theta$$

$$bd\theta=\pm dx \Rightarrow b\theta=\pm(x+a) \quad \therefore y=b\cosh(\frac{x-a}{b})$$

وهذه المعادلة هي الحل المطلوب ويكون شكل المنحنى كما هو معروف الذي يسمى بمنحنى الكتينة (السلسلة) العادية.

مثال ٤:
في الحركة التوافقية البسيطة استخدم مبدأ هاملتون الأقل لإيجاد معادلات الحركة.

الحـل

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \ , \ \delta T=m\dot{x}\delta\dot{x} \ , \ \delta W=-kx\delta x$$

$$\therefore \int_0^\tau(\delta T+\delta W)dt=0=\int_0^\tau m\dot{x}\,d(\delta x)-\int_0^\tau kx\delta x\,dt$$

$$m\dot{x}\delta x\Big]_0^\tau-\int_0^\tau m\ddot{x}\delta x\,dt-\int_0^\tau kx\delta x\,dt=0$$

الحد الأول يتلاشى عند $0 , \tau$. وحيث أن δx إزاحة اختيارية فإننا نصل إلى معادلة نيوتن الثاني

$$-\int_0^\tau(m\ddot{x}+kx)\delta x\,dt=0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x}=-kx$$

مثال ٥:
جسيم يتحرك في مستوى رأسي تحت تأثير وزنه أوجد معادلات نيوتن الثاني باستخدام مبدأ هاملتون للتأثير الأقل.

الحـل

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right),\ \delta T=m\dot{x}\frac{d}{dt}(\delta x)+m\dot{y}\frac{d}{dt}\delta y$$

$$\delta W=-mg\,\delta y$$

$$\int_0^{\tau}(\delta T+\delta W)=0=\left[m\dot{x}\,\delta x+m\dot{y}\,\delta y\right]_0^{\tau}-\int_0^{\tau}m\ddot{x}\,\delta x\,dt$$

$$\int_0^{\tau}m\ddot{y}\,\delta y\,dt-\int_0^{\tau}mg\,\delta y\,dt=0$$

وحيث أن δx ، δy اختيارين ومستقلين فنحصل على المعادلات المثلة للحركة لنيوتن

$$m\ddot{x}=0\quad,\ m\ddot{y}=-mg$$

مثال ٦:

ادرس منحنيات التوقف Extremels للتكامل الآتي : $I=\int_a^b x^2\,y'^2\,dx$

ومن ثم أوجد الحل الذي يصل بين النقطتين $a(1,1)$, $b(2,1/2)$.

الحـل

$$F(x,y,y')=x^2\,y'^2$$

ومنها

$$\frac{\partial F}{\partial y}=0\quad ،\quad \frac{\partial F}{\partial y'}=2x^2\,y'$$

ومن ثم معادلة أويلر ستصبح

$$\frac{d}{dx}\left(2x^2y'\right)=0\ \Rightarrow\ x^2\,y'=\text{const.}=A$$

أي

$$y'=\frac{A}{x^2}$$

بالتكامل نحصل على منحنيات التوقف في الصورة: $y=-\frac{A}{x}+B$

حيث A، B ثابتان اختياريان والمنحنيات تمثل قطاعات زائدة قائمة ومنحنى التوقف الذي يربط بين النقطتين a، b نوجده بالتعويض في معادلة منحنيات التوقف فنحصل على

$$-A+B=1 \quad , -\frac{A}{2}+B=\frac{1}{2}$$

ومنها A = -1 ، B = 0 ويصبح معادلة منحنى التوقف المطلوب هي

$$x\,y=1$$

واضح أن نقطتي النهاية a، b تقعان على المنحنى.

ناقش ما إذا كانت النقطتان $b(-2,-1/2), a(1,1)$ يصلا المنحنى وهما نقطتان توقف.

مثال ٧:

إذا كان البعد بين نقطتين على سطح اسطوا ني يعطى من:

$$I=\int_a^b [1+\rho^2(\frac{d\phi}{dz})^2]^{\frac{1}{2}}\,dz$$

حيث إحداثيات النقطة هي (ρ,ϕ,z) و ρ مقدار ثابت. أوجد معادلة الخط الواصل بين النقطتين حتى يكون الخط أقصر بعد بينهما (ما هي العلاقة بين (ϕ,z) التي تجعل I نهاية صغرى.

الحل

العلاقة بين (ϕ,z) التي تجعل I نهاية صغرى نوجده من معادلة أويلر.

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial F}{\partial \phi'}\right)-\frac{\partial F}{\partial \phi}=0$$

$$F=\left[1+\rho^2\,\phi'^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \phi'=\frac{d\phi}{dz}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi}=0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial \phi'}=\rho^2\,\phi'\left(1+\rho^2\,\phi'^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

بالتعويض في معادلة أويلر نحصل على :

$$\frac{\partial F}{\partial \phi'} = \rho^2 \frac{d\phi}{dz}\left(1+\rho^2\left(\frac{d\phi}{dz}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \text{const.}$$

بوضع $\phi' = \frac{d\phi}{dz}$ وبفصل المتغيرات والتكامل مرة أخرى نحصل على :

$$\rho\,\phi = A\,z + B$$

حيث A, B ثوابت.

يتضح من العلاقة السابقة أن أقصر بعد بين a , b يمثل خط حلزوني ويلاحظ أنه بفرض عند a كان $\phi = 0, z = 0$ فإن B=0 وبفرض عند b كان $z = z_1$ ، $\phi = \phi_1$ وبالتالي $A = \frac{\rho\,\phi_1}{z_1}$ ويصبح: $\rho\,\phi = (\rho\,\phi_1/z_1)z$ هي المعادلة النهائية.

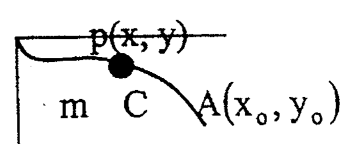
مثال ٨:

تنزلق نقطة مادية تحت تأثير الجاذبية على سلك أملس واقع في مستوى رأسي بدأت النقطة الحركة من السكون من إحدى نقط السلك فأوجد زمن الوصول إلى نقطة أخرى معينة على السلك.

الحل

نفرض أن مسار النقطة هو المنحنى C وأن $A(x_o, y_o)$ هي نقطة البداية ، $p(x, y)$ هي موضع النقطة عند أي لحظة من مبدأ ثبوت الطاقة نجد أن :

شكل (٤- ٦)



$$\frac{1}{2} m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = m g y \quad \text{or} \quad \frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{2 g y}$$

حيث s طول القوس وحيث أن $\frac{ds}{dt}$

تتزايد بتزايد y فإن $\frac{ds}{dt}=\sqrt{2gy}$ ومنه ينتج أن : $t=\int\frac{ds}{\sqrt{2gy}}$

والزمن المطلوب هو $\tau=\int_0^{y_o}\frac{ds}{\sqrt{2gy}}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_o}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx$

حيث أن $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$

الدالة $\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$ $F(x,y,y')$ هنا x غائبة وقيمة التكامل تعبر عن كمية طبيعية وهي الزمن.

مثال ٩:

تنزلق نقطة مادية تحت تأثير الجاذبية على سلك أملس واقع في مستو رأسي فإذا بدأت النقطة حركتها من السكون من إحدى نقط السلك. فإذا كان على النقطة المادية أن تقطع المسافة بين نقطة البداية إلى نقطة النهاية في أقل زمن ممكن فاثبت أن المعادلة التفاضلية للمنحنى C هي : $1+y'^2+2yy''=0$

الحل

بما أن معادلة أويلر للمنحنى الأفقي هي :

شكل (٤- ٧)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

حيث من مثال (٨) $F=(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}\;y^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{2}\left(1+y'^2\right)^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}} \quad , \qquad \therefore \ \frac{\partial F}{\partial y'} = \left(1+y'^2\right)^{-\frac{1}{2}} y' \, y^{-\frac{1}{2}} \ ,$$

بالتعويض في معادلة أويلر والاختصار نحصل على

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + y'^2 + 2\, y\, y'' = 0$$

مثال١٠:

أوجد المنحنى C والذي طوله ℓ والذي يحيط بأكبر مساحة ممكنة.

الحـل

نعلم أن المساحة المحددة بالمنحنى C تعطى من :

$$A = \frac{1}{2} \int_C (x\, dy - y\, dx)$$

$$A = \frac{1}{2} \int_C (x\, y' - y)\, dx \tag{1}$$

طول المنحنى يعطى من

$$S = \int_C \sqrt{1+y'^2} \ dx = \ell \tag{2}$$

باستخدام معاملات لاجرانج : نعتبر أن

$$F = A + \lambda S$$

$$\therefore \ \tau = \int_C \left[\frac{1}{2}(x\, y' - y) + \lambda \sqrt{1+y'^2} \ \right] dx \tag{3}$$

من معادلة أويلر لحساب التغير

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

حيث $F=\frac{1}{2}(x y'-y)+\lambda\sqrt{1+y'^2}$

نجد أن

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x+\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)+\frac{1}{2}=0$$

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=-1 \qquad (4)$$

بتكامل (4) نحصل على: $\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}=-x+C_1$

ومنها نوجد y' : $\frac{dy}{dx}=\pm\frac{x-C_1}{\sqrt{\lambda^2-(x-C_1)^2}}$

بالتكامل

$$y-C_2=\pm\sqrt{\lambda^2-(x-C_1)^2}$$

or

$$(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=\lambda_2 \qquad (5)$$

وهذه معادلة دائرة نصف قطرها $\lambda=\frac{\ell}{2\pi}$ وهو المنحنى المطلوب.

مثال ١١:

اثبت أن معادلة أويلر: $\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'}) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ يمكن كتابتها على الصورة $\frac{d}{dx}[F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}] - \frac{\partial F}{\partial x} = 0$ وإذا كانت F لا تعتمد على x صراحة فاثبت أن :

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = const.$$

الحـل

أولاً : إذا كانت $F = F(x, y, y')$

(1) $$\therefore \quad \frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y''$$

كذلك

(2) $$\frac{d}{dx}\left(y' \frac{\partial F}{\partial y'}\right) = y' \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{\partial F}{\partial y'} y''$$

بطرح (1)، (2)

$$\frac{d}{dx}\left[F - y' \frac{\partial F}{\partial y'}\right] = \frac{\partial F}{\partial x} + y' \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]$$

ولكن المقدار $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$

حيث أن F تحقق معادلة أويلر وبالتالي نحصل على :

(3) $$\frac{d}{dx}\left[F - y' \frac{\partial F}{\partial y'}\right] - \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

ثانياً : إذا كانت F لا تعتمد على x فإن $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ ومن (3) نحصل على

$$\frac{d}{dx}\left[F - y' \frac{\partial F}{\partial y'}\right] = 0$$

وبالتكامل بالنسبة إلى x نحصل على

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$$

مثال ١٢:
أوجد معادلات حركة البندول البسيط بتطبيق مبدأ هاملتون لخيط مرن.

الحـل

دالة لاجرانج للبندول

$$L = T - V\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + m\,g\,r\cos\theta - \frac{1}{2}k\left(r - r_o\right)^2$$

حيث r_o هو الطول الأصلي للخيط، k ثابت المرونة (الشد).
بتطبيق قاعدة هاملتون والتي تنص على أن

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L\,d t = 0$$

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2} \left\{m\left(\dot{r}\,\delta\,\dot{r} + r\,\dot{\theta}^2\,\delta\,r + r^2\,\dot{\theta}\,\delta\,\dot{\theta}\right) + m\,g\,\delta r\cos\theta - m\,g\,r\,\delta\,\theta\sin\theta\right.$$
$$\left. - k\left(r - r_o\right)\delta\,r\right\}d\,t$$

ولكن

$$m\,\dot{r}\,\delta\,\dot{r}\,d\,t = m\,\dot{r}\,d\left(\delta\,r\right)$$
$$= d\left(m\,\dot{r}\,\delta\,r\right) - m\,\delta\,r\,\ddot{r}\,d\,t$$

بالمثل

$$m\,r^2\,\dot{\theta}\,\delta\,\dot{\theta}\,d\,t = d(m\,r^2\,\dot{\theta}\,\delta\,\theta) - \delta\,\theta\frac{d(m\,r^2\dot{\theta})}{d\,t}d\,t$$
$$= d(m\,r^2\,\dot{\theta}\,\delta\,\theta) - \delta\,\theta(m\,r^2\,\ddot{\theta} + 2\,m\,r\,\dot{r}\,\dot{\theta})\;\;d\,t$$

من ثم يصبح التكامل السابق

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\left\{m\,\ddot{r} - m\,r\,\dot{\theta}^2 - m\,g\cos\theta + k\left(r - r_o\right)\right\}\delta\,t + \right.$$
$$\left.\left\{m\,r^2\,\ddot{\theta} + 2\,r\,\dot{r} + m\,g\,r\sin\theta\right\}\delta\,\theta\,\right]d\,t$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left[d(m\dot{r}\,\delta r)+d(mr^2\dot{\theta}\,\delta\theta)\right]dt=0$$

ونفرض أن $\delta r \text{،} \delta\theta$ تتلاشى عند t_1, t_2 فإن التكامل الأخير يتلاشى وكذلك التكامل الأول حيث أن $\delta r \text{،} \delta\theta$ مستقلان فإن معاملاتهما يتلاشيان كل على حدة أي أن:

$$m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2-mg\cos\theta+k(r-r_o)=0\ ,$$
$$mr^2\ddot{\theta}+2mr\dot{r}\dot{\theta}+mgr\sin\theta=0$$

وهذه هي معادلات الحركة للبندول والتي من الممكن الحصول عليها بتطبيق معادلات لاجرانج. كذلك إذا كانت $k = 0$ فإننا نحصل على معادلة البندول البسيط العادي (الخيط غير مرن).

تمارين

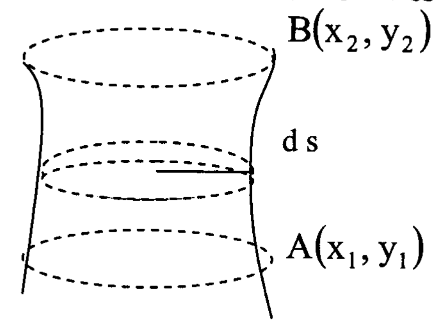
١) جسيم ينزلق من السكون من إحدى نهايتي سلك أملس مثبت في مستوى رأسي تحت تأثير مجال الجاذبية فإذا كان الزمن الكلي الذي يستغرقه الجسيم حتى يصل للنهاية الأخرى للسلك يعطى من : $\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^y \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx$ أثبت أنه إذا كان هذا الزمن هو أقل زمن ممكن أن يستغرقه الجسيم فإن المنحنى C الذي يمثل شكل السلك يعطى من المعادلة التفاضلية: $1+y'^2+2yy''=0$

ثم أوجد حل المعادلة التفاضلية وأثبت أن المنحنى C هو منحنى سيكلويد.

إرشادات : من المثال السابق $F=\left(1+y'^2\right)^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$

واستخدم الشرط الضروري لكي يكون الزمن نهاية صغرى وهو تحقق معادلة أويلر للمنحنى الأقصى . ثم نوجد حل المعادلة التفاضلية الناتجة باستخدام التعويض $y'=u(y)$ أي تخفيض الرتبة ثم استخدم فصل المتغيرات.

٢) نقطتين ثابتتين $A(x_1,y_1)$ ، $B(x_2,y_2)$ يصل بينهما منحنى كما هو مبين بالشكل. فإذا دار هذا المنحنى حول محور y فأوجد معادلة هذا المنحنى لكي يكون مساحة السطح الناشئ عن الدوران أقل ما يمكن.



إرشادات : تقسيم السطح إلى شرائح كل منها $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

$$= \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

ومساحة سطح الشريحة الدورانية: $2\pi x\, ds = 2\pi x \sqrt{1 + y'^2}\, dx$

من ثم والمساحة الدورانية الكلية ستكون: $2\pi \int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{1 + y'^2}\, dx$

ومن ثم $F = x\sqrt{1 + y'^2}$

ولإيجـــاد القيمـــة الـــصغرى لهـــذه المـــساحة اســـتخدام معادلـــة أويلـــر والحـــل $y = a\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \beta$ وهى تمثل معادلة منحنى الكتينة. حيث a, β ثوابت تتعين من معادلة المنحنى عند النقطتين A, B



معادلات راوث Routh's Equations

* الإحداثيات الدورية أو المهملة
* طرق دراسة المسائل الديناميكية المحتوية على الإحداثيات المهملة
* دالة ومعادلات راوث
* أمثلة

الباب الخامس

معادلات راوث Routh's Equations

٤-١ الإحداثيات الدورية أو المهملة:

المنظومة الديناميكية التي لها n درجة حرية إذا فرض أن عدد من احداثياتها المعممة والتي عددها $n - m$ لا تظهر صراحة في دالة لاجرانج L (وأيضاً دالة هاملتون H) تسمى بالإحداثيات المهملة أو الغائبة أو الدورية ويظهر مكانه أو بدلاً منه السرعة المعممة المرافقة له صراحة في L وتظهر في H كميات الحركة المعممة المرافقة للإحداثيات المهملة المعممة كمثال المقذوف العادي الإحداثي x غائباً و L يتضمن $\dot{x}$ أي:

$$L = L(\dot{x}, \dot{y}, y)$$

عموماً إذا رمزنا للإحداثيات غير المهملة q_α حيث $\alpha = 1, 2, ..., m$ والإحداثيات الغائبة s_i حيث $i = m+1, ..., n$ في هذه الحالة تكون $L = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, \dot{s}_\alpha)$ (مع ملاحظة إن غياب s_i لا يستلزم غياب $\dot{s}_i$) فان :

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial s_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_i = \text{const.}$$

أي أن كمية الحركة المرافقة للإحداثي المهمل تظل ثابتة إثناء الحركة . كذلك من معادلات هاملتون يكون للإحداثي المهمل

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial s_i} = 0 \Rightarrow H = H(q_\alpha)$$

نستنتج أن الإحداثي المهمل s_i لا يظهر صراحة في دالة لاجرانج L فانه لا يظهر صراحة في دالة هاملتون H.

٤-٢ طرق دراسة المسائل الديناميكية المحتوية على الإحداثيات المهملة

هناك طريقتان لدراسة المسائل الديناميكية المحتوية على الإحداثيات المهملة.

الأولى : تطبيق معادلات لاجرانج مباشرة.

الثانية : إدخال دالة راوث ومعادلات راوث.

الطريقة الأولى: إذا فرضنا دالة لاجرانج L لا تعتمد صراحة على الزمن t أي تكن دالة في الإحداثيات المهملة والتي عددها $n-m$ وهي $s_{m+1}, s_{m+2}, ..., s_n$ والباقي إحداثيات معممة غير مهملة عددها q_α حيث $\alpha = 1, ..., m$

أي دالة لاجرانج

$$L = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, s_i) \tag{1}$$

حيث $\alpha = 1, 2, ..., m, \quad i = 1, ,\cdots, n$

ومعادلات لاجرانج تصبح

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i}\right) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad i = m+1, m+2, \ldots, n \tag{3}$$

من المعادلة (2) بالتكامل نحصل على :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i} = \text{const.} = \beta_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{4}$$

والمعادلة (4) تمثل معادلات خطية عددها m في $\dot{s}_i$ التي يمكن حلها لإيجاد $\dot{s}_i$ بدلالة المتغيرات $\beta_i, q_\alpha, \dot{q}_\alpha$ أي

$$\dot{s}_i = \dot{s}_i\left(q_1, ..., q_m, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_m, \beta_1, ..., \beta_m\right) \tag{5}$$

ثم بالتعويض من (5) في المعادلة (3) نحصل على n-m من المعادلات التفاضلية في $\beta_i, \dot{q}_\alpha, q_\alpha$ التي يمكن تكاملها للحصول على q_α كدالة في الزمن t أي $q_\alpha(t)$ بعد استخدام الشروط الابتدائية. ثم بتكامل المعادلة (5) بعد التعويض عن $q_\alpha, \dot{q}_\alpha$ كدوال في t فنحصل على الإحداثيات المعممة المهملة كدوال في t بعد استخدام الشروط الابتدائية

$$s_i = \int \dot{s}_i \, dt + c_i = s_i(t) \qquad (6)$$

ومن ثم نحصل على الحل الكامل للمسألة الديناميكية.

الطريقة الثانية : دالة ومعادلات راوث

هذه الطريقة تعتمد على الدالة R والتي تعتبر تعديل لدالة لاجرانج لتلائم الإحداثيات المعممة المهملة ويتم ذلك بحساب التعبير التفاضلي لدالة لاجرانج $L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, \dot{s}_i)$ فنحصل على

$$dL = \sum_{\alpha=m+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i} d\dot{s}_i \qquad (7)$$

ومن المعادلة (4) نجد أن

$$dL = \sum_{\alpha=m+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \sum_{i=1}^{m} \beta_i d\dot{s}_i$$

$$dL = \sum_{\alpha=m+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + d\sum_{i=1}^{m} \beta_i d\dot{s}_i - \sum_{i=1}^{m} \dot{s}_i \, d\beta_i \qquad (8)$$

والتي يمكن كتابتها

$$d\left(L - \sum_{i=1}^{m} \beta_i \dot{s}_i\right) = \sum_{\alpha=m+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha - \sum_{i=1}^{m} \dot{s}_i d\beta_i = dR$$

حيث

$$R = L - \sum_{i=1}^{m} \beta_i \dot{s}_i \qquad (9)$$

وتسمى R دالة راوث وهذه هي طريقة تركيب الدالة ولكنها لا تكون دالة راوث المتممة إلا بعد حذف $\dot{s}_i$ منها وذلك بالتعويض من المعادلات (5) أي:

$$\dot{s}_i = \dot{s}_i(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, \beta_i)$$

فنحصل على

$$R = R(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, \beta_i) \qquad (10)$$

من المعادلة (٩)يكون

$$dR = \sum \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} d q_\alpha + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d q_\alpha + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i} d s_i - \sum \beta_i \, d \dot{s}_i - \sum \dot{s}_i \, d\beta_i \qquad (11)$$

ولكن من المعادلة (10)

$$dR = \sum_{\alpha=m+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} d q_\alpha + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha} d q_\alpha + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial R}{\partial \beta_i} \beta_i \qquad (12)$$

بمقارنة (11) بـ (12) نحصل على :

$$\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}, \quad \frac{\partial R}{\partial \beta_i} = -\dot{s}_i \qquad (13)$$

فإذا عوضنا في معادلات لاجرانج نصل إلى معادلات راوث

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = 0 \quad , \quad \alpha = m+1, m+2, \ldots, n \qquad (14)$$

وهذه $n-m$ من المعادلات والتي لا تتضمن الإحداثيات الغائبة. من ثم يكون عند البداية قد تم حذف الإحداثيات الغائبة بدلاً من حل n من المعادلات الآنية (معادلات لاجرانج) ثم إجراء الحذف بعد ذلك.

والمعادلات (14) بتكاملها باستخدام الشروط نحصل على q_α كدالة في t ثم نعوض في المعادلة $\frac{\partial R}{\partial \beta_i} = -\dot{s}_i$ والتي بتكاملها نحصل على s_i كدالة في الزمن

$$s_i = -\int \frac{\partial R}{\partial \beta_i} . d t + c_i$$

وهكذا نحصل على حل كامل للنظام الديناميكي.

مثال ١:

نظام ديناميكي طاقة الحركة له $T = \frac{\dot{q}_1^2}{2(a + b q_2^2)} + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2$ وطاقة الوضع له $V = c q_2^2 + d$. حيث a, b, c, d ثوابت. أوجد دالة راوث واستخدمها لتعيين q_1, q_2 كدوال في الزمن.

الحل:

$$L = \frac{\dot{q}_1^2}{2\left(a + b q_2^2\right)} + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 - c q_2^2 - d$$

واضح أن $q_1 = s_1$ هو الإحداثي المهمل (الغائب).

$$\because \ R = L - \beta_1 \dot{s}_1$$

فإن :

$$R = \frac{\dot{s}_1^2}{2\left(a + b q_2^2\right)} + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 - c q_2^2 - \beta \dot{s}_1 - d$$

حيث β_i ثابت من ثوابت الحركة.

ولكن R يجب أن تكون على الصورة $R\left(q_2, \dot{q}_2, \beta_1\right)$

ولتحقيق ذلك نستخدم العلاقة :

$$\beta_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_1} = \frac{\dot{s}_1}{a + b\, q_2^2}$$

$$\therefore\ \dot{s}_1 = \beta_1 \left(a + b\, q_2^2\right)$$

بالتعويض في R ينتج أن :

$$R = -\frac{\beta_1^2}{2}\left(a + b\, q_2^2\right) + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 - c\, q_2^2 - d$$

من المعادلة

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_2} = 0$$

نحصل على

$$\ddot{q}_2 + \omega^2\, q_2 = 0$$

حيث $\omega^2 = 2c + b\,\beta_1^2$ ويكون الحل العام هو

$$q_2 = A \sin\left(\omega t + \varepsilon\right)$$

وللحصول على الإحداثي الغائب s_1 كدالة في الزمن نستخدم المعادلة $\frac{\partial R}{\partial \beta_1} = \dot{s}_1$ ومنها

$$\dot{s}_1 = \beta_1 \left(a + b\, q_2^2\right)$$
$$s_1 = \int \beta_1 \left(a + b\, q_2^2\right) dt$$
$$q_1 = s_1 = \beta_1 \left(a + \frac{b A^2}{2}\right) t - \frac{\beta_1\, b A^2}{4\omega} \sin\left(\omega t + \varepsilon\right) + \text{const.}$$

مثال ٢:

نظام ديناميكي طاقة حركة $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + q_1^2\, \dot{q}_2^2)$ وطاقة الوضع له $V = \frac{1}{2} k^2\, q_1^2$.

أوجد دالة راوث واستخدمها لإيجاد q_1 .

الحل : الإحداثي الغائب هو $q_2 = s_2$ ، فيكون:

$$R = L - \beta_2 \dot{s}_2$$

$$R = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}q_1^2 \dot{s}_1^2 - \frac{1}{2}k^2 q_1^2 - \beta_2 \dot{s}_2 \quad \square$$

ولكن $\beta_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_2} = q_1^2 \dot{s}_2$ ومنها

$$R = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 - \frac{1}{2}\frac{\beta_2^2}{q_1^2} - \frac{1}{2}k^2 q_1^2 \qquad \therefore R = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 - k^2 q_1^2 - \frac{\beta_2^2}{q_1^2})$$

$\square$

من المعادلة

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial R}{\partial q_1}\right) = 0$$

$$\ddot{q}_1 - \frac{\beta_2^2}{q_1^3} + k^2 q_1 = 0$$

بالتكامل نحصل على :

$$\frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}k^2 q_1^2 + \frac{\beta_2^2}{2}\frac{1}{q_1^2} = \text{const.} = \alpha$$

ومنها

$$\dot{q}_1 q_1 = \sqrt{2\alpha q_1^2 - \beta_2^2 - k^2 q_1^4}$$

بفصل المتغيرات وبوضع $y = q_1^2$ نحصل على

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2\alpha y - \beta_2^2 - k^2 y^2}} = 2\int dI$$

ومنها نحصل على

$$y = a \sin(2kt + b) + c$$

$$q_1^2 = a \sin(2kt + b) + c$$

حيث

$$c = \frac{\alpha}{k^2}, \; a^2 = \frac{\alpha^2}{k^4} - \frac{\beta_2^2}{k^2}$$

مثال ٣:

في مجموعة من البكرات الخفيفة الملساء حيث الكتلة 3m معلقة من أحد نهايتي خيط غير مرن طوله ℓ يمر على بكرة خفيفة ملساء ثابتة وعند الطرف الآخر للخيط توجد بكرة خفيفة ملساء يمر عليها خيط غير مرن طوله s يحمل في أحد طرفيه الكتلة m والطرف الأخر الكتلة 2 m. أوجد:

أ- القوى المعممة ب- دالة لاجرانج للمجموعة جـ- دالة هاملتون د- دالة راوث

و- معادلات لاجرانج وهاملتون وراوث هـ- طبق مبدأ هاملتون للفعل الأقل.

الحـل

المجموعة الديناميكية مكونة من ثلاثة جسيمات m، 2m، 3 m. واضح أن x, y هما الإحداثيات المعممة (انظر الشكل) حيث أنها كافية لتعيين موضع المجموعة. حيث x هي المسافة بين مركزي البكرتين المتحركة والثابتة، y هي المسافة بين الكتلة المعلقة m ومركز البكرة المتحركة. موضع الكتلة m بالنسبة إلى مركز البكرة الثابتة o هو (x+y) موضع الكتلة 2m بالنسبة إلى o هو موضع الكتلة 3m بالنسبة إلى o هو $(\ell - x)$ حيث كلاً من ℓ ، s ثابت. السرعات المعممة هي: $\dot{x}, \dot{y}$

السرعات الحقيقية هي:

سرعة الكتلة m هي:

$$\frac{d}{dt}(x+y) = \dot{x} + \dot{y}$$

سرعة الكتلة 2 m هي :

$$\frac{d}{dt}(x+s-y) = \dot{x} - \dot{y}$$

سرعة الكتلة 3 m هي:

$$\frac{d}{dt}(\ell - x) = -\dot{x}$$

شكل (٥- ١)

الشغل المبذول بواسطة القوى المعممة Q_1, Q_2 في ازاحات الإحداثيات المعممة يساوي الشغل المبذول بواسطة القوى الحقيقية المؤثرة على الجسيمات. أي أن:

$$\sum_{v} \underline{F}_v \cdot d\,\underline{r}_v = \sum_{\alpha=1}^{n} Q_\alpha \, d\,q_\alpha$$

$$\therefore\; Q_1\, d\,x + Q_2\, d\,y = 3\,m\,g\,d\,(\ell - x) + 2\,m\,g\,(x + s - y) \qquad = 0$$

$$+\,m\,g\,d\,(x + y)$$

$$d\,x - m\,g\,d\,y$$

$$\therefore\; Q_1 = 0 \quad , QA_2 = -\,m\,g$$

وكان يمكن إيجادها بطريقة أخرى :

حيث أن طاقة الموضع V للمجموعة تتبين من (باتخاذ o كموضع للصفر) :

$$V = -\,3\,m\,g\,(-\,x) - 2\,m\,g\,(x + s - y) - m\,g\,(x + y)$$

$$= m\,g\,y + C$$

نجد أن : $Q_1 = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad , \; Q_2 = -\dfrac{\partial V}{\partial y} = -\,m\,g$

طاقة حركة المجموعة:

$$T = \frac{1}{2}[3\,m\,\dot{x}^2 + 2\,m\left(\dot{x} - \dot{y}\right)^2 + m\left(\dot{x} + \dot{y}\right)^2]$$

$$= \frac{1}{2}\,m\left(6\,\dot{x}^2 - 2\,\dot{x}\,\dot{y} + 3\,\dot{y}^2\right)$$

كميات الحركة المعممة :

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\left(6\,\dot{x} - \dot{y}\right) \quad , \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\left(-\,\dot{x} + 3\,\dot{y}\right)$$

ومنها نجد أن :

$$\dot{x} = \frac{3\,p_1 + p_2}{17\,m} \quad , \quad \dot{y} = \frac{p_1 + 6\,p_2}{17\,m}$$

دالة لاجرانج : $L = T - V$ (بغض النظر عن الثابت)

$$L = \frac{1}{2} m \left(6\,\dot{x}^2 - 2\,\dot{x}\,\dot{y} + 3\,\dot{y}^2\right) - m\,g\,y$$

يلاحظ أن x إحداثي مهمل.

دالة هاملتون : $H = T + V$

$$H = \frac{1}{578\,m}[6\left(3\,p_1 + p_2\right)^2 - 2\left(3\,p_1 + p_2\right)\left(p_1 + 6p_2\right)]$$

$$+ 3\left(p_1 + 6p_2\right)^2 + mg$$

$$\therefore H = \frac{1}{578\,m}\left(51\,p_1^2 + 102\,p_2^2 + 34\,p_1 p_2\right) + m\,g\,y$$

دالة راوث :

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\left(6\,\dot{x} - \dot{y}\right) = \text{const.} = C \quad \text{say}$$

$$\therefore\ R = \frac{1}{2} m \left(6\,\dot{x} - 2\,\dot{x}\,\dot{y} + 3\,\dot{y}^2\right) - m\,g - \dot{x}\,C$$

وللحصول على دالة راوث الصحيحة يجب حذف x منها وحيث أن :

$$\dot{x} = \frac{1}{6}\left(\frac{C}{m} + \dot{y}\right) \qquad \therefore\ R = -\frac{C^2}{12\,m} - \frac{C\,\dot{y}}{6} + \frac{17}{12} m\,\dot{y}^2 - m\,g\,y$$

معادلات لاجرانج :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0\ , \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

ويعطيان

$$m\left(6\,\ddot{x} - \ddot{y}\right) = 0 \quad , \quad m\left(\ddot{x} - 3\,\ddot{y}\right) = m\,g$$

ويمكن الحصول على عجلات الكتل حيث عجلة الكتلة m تساوي $(\ddot{x} + \ddot{y})$ وعجلة الكتلة 2 m هي $(\ddot{x} - \ddot{y})$ وعجلة 3 m هي $(-\ddot{x})$ وبحل معادلتي لاجرانج في $\ddot{x}$ ، $\ddot{y}$ نجد أن:

$$\ddot{x} = -\frac{1}{17} g \quad , \quad \ddot{y} = -\frac{6}{17} g$$

معادلات هاملتون :

$$\dot{p}_1 = \frac{\partial H}{\partial x} \quad \therefore \ \dot{p}_1 = 0 , \quad p_1 = \text{const (C)} \qquad (1)$$

$$\dot{p}_2 = \frac{\partial H}{\partial y} \quad \therefore \ \dot{p}_2 = -m g \qquad (2)$$

$$\dot{q}_1 \equiv \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{3 p_1 + p_2}{17 m} \qquad (3)$$

$$\dot{q}_2 \equiv \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{6 p_2 + p_1}{17 m} \qquad (4)$$

معادلات راوث :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial R}{\partial y} = 0 \quad \therefore \ \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{6} C + \frac{17}{6} m \dot{y}\right) + m g = 0$$

$$\therefore \ \frac{17}{6} m \ddot{y} = -m g$$

وهي نفس النتيجة السابق الحصول عليها من معادلات لاجرانج.

$$\frac{\partial R}{\partial C} = -\dot{x} \quad \therefore \ -\frac{C}{6m} - \frac{\dot{y}}{6} = -\dot{x}$$

$$\dot{x} = \frac{1}{6}\left(\frac{C}{m} + \dot{y}\right) \quad \therefore \ \ddot{x} = \frac{1}{6} \ddot{y} = -\frac{1}{17} g \ \text{ or}$$

وهي نفس النتيجة السابق الحصول عليها من معادلات لاجرانج.

مبدأ هاملتون للفعل الأقل :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = 0 \ \text{ or } \ \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt = 0$$

وباستخدام صيغة L

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2}[\frac{1}{2}m(12\dot{x}\,\delta\dot{x}-2\dot{x}\,\delta\dot{y}-2\dot{y}\,\delta\dot{y}+6\dot{y}\,\delta\dot{y})]dt-\int_{t_1}^{t_2} mgy\,dt=0$$

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2}(6\dot{x}-\dot{y})d(\delta x)+m\int_{t_1}^{t_2}(3\dot{y}-\dot{x})d(\delta y)-mg\int_{t_2}^{t_2}\delta y dt=0$$

بالتكامل بالتجزيء للتكامل الأول والثاني :

$$\therefore m[(6\dot{x}-\dot{y})(\delta x)\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}(6\ddot{x}-\ddot{y})(\delta x)dt]$$

$$+m[(3\dot{y}-\dot{x})(\delta y)\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}(3\ddot{y}-\ddot{x})(\delta y)dt-mg\int_{t_1}^{t_2}(\delta y)dt$$

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2}(-6\ddot{x}+\ddot{y})(\delta x)dt+m\int_{t_1}^{t_2}(\ddot{x}-3\ddot{y}-g)(\delta y)dt=0$$

وهذا لا يتأتى إلا إذا كانت الكميات تحت التكامل تساوي الصفر حيث أن الإزاحات $\delta x, \delta y$ اختيارية وبذلك نحصل على :

$$m(-6\ddot{x}+\ddot{y})=0 \quad , \quad m(\ddot{x}-3\ddot{y}-g)=0$$

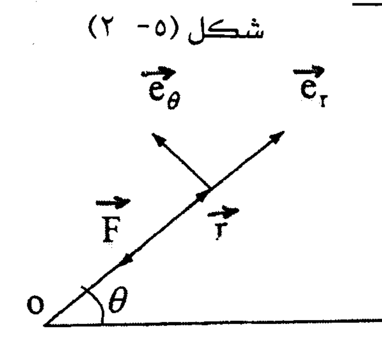
وهي نفس المعادلات السابق الحصول عليها من معادلات لاجرانج.

مثال ٤:

يتحرك جسيم تحت تأثير قوة مركزية جاذبة $\vec{F}=-(\mu m/r^3)\,\vec{r}$ حيث m هي كتلة الجسيم، μ ثابت، $\vec{r}$ متجه الموضع. أوجد دوال لاجرانج وهاملتون وراوث ومعادلاتهم.

الحـل

شكل (٥- ٢)



المجموعة الديناميكية مكونة من جسيم واحد. الإحداثيات المعممة هي:

$$q_2 = \theta \text{ ، } q_1 = r$$

السرعات المعممة هي:

$$\dot{q}_2 = \dot{\theta} \text{ ، } \dot{q}_1 = \dot{r}$$

السرعات الحقيقية هي $\dot{r}$ ، $r\dot{\theta}$ والقوى المعممة Q_1 ، Q_2 تتعين من:

$$Q_1\, d\, r + Q_2\, d\,\theta = \vec{F} . d\,\vec{r} = -\frac{\mu\, m}{r^3}\,\vec{r} . d\vec{r} = -\frac{\mu\, m}{r^2}\, d\, r$$

$$\therefore \quad Q_1 = -\frac{\mu\, m}{r^2} \qquad , \qquad Q_2 = 0$$

طاقة الحركة هي : $T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2)$

طاقة الموضع تتعين من : $\vec{F} = -\vec{\nabla}\, V\,(r\,,\theta)$

$$\therefore \quad -\frac{\mu\, m}{r^2}\,\vec{e}_r = -\frac{\partial\, V}{\partial\, r}\vec{e}_r \;\; -\frac{1}{r}\frac{\partial\, V}{\partial\,\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\therefore \quad \frac{\partial\, V}{\partial\,\theta} = 0 \quad \text{i.e.} \quad V \equiv V(r)$$

أي أن V هي دالة في r فقط. كذلك

$$\frac{\partial\, V}{\partial\, r} = \frac{d\, V}{d\, r} = \frac{\mu\, m}{r^2}$$

وبالتكامل : $\therefore \quad V = -\frac{\mu m}{r} + C$

بفرض أن $V = 0$ عند $r = \infty$ إذن $C = 0$ وتصبح V كالتالي: $\therefore \quad V = -\frac{\mu m}{r}$

وكان يمكن الحصول على V من التعريف:

$$V = -\int_{\infty}^{r} \vec{F}.d\vec{r} = -\mu m \int_{r}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = -\frac{\mu m}{r}$$

كميات الحركة المعممة هي :

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad ; p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$$

ومنها

$$\dot{r} = \frac{p_1}{m} \quad , \quad \dot{\theta} = \frac{p_2}{m r^2}$$

دالة لاجرانج: $L = T - V$

$$\therefore L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\mu m}{r}$$

دالة هاملتون: $H = T + V$

$$\therefore H = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\mu m}{r} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2mr^2} - \frac{\mu m}{r}$$

هو إحداثي مهمل. $q_2 \equiv \theta$ واضح أن دالة راوث :

حيث أن θ هو إحداثي مهمل

$$\therefore p_2 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \text{const.} = C \text{ say}$$

$$\therefore p_2 \equiv m r^2 \dot{\theta} = C \quad \text{or} \quad \dot{\theta} = \frac{C}{m r^2}$$

دالة راوث R هي: $R = L - C\dot{\theta}$

ويجب حذف $\dot{\theta}$ منها:

$$\therefore R = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{\mu m}{r} - C\dot{\theta}$$

$$R = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \frac{C^2}{m^2 r^4}) + \frac{\mu m}{r} - \frac{C^2}{m r^2}$$

$$\therefore R = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{C^2}{2 m r^2} + \frac{\mu m}{r}$$

معادلات لاجرانج :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(m \dot{r}) - m r \dot{\theta}^2 + \frac{\mu m}{r^2} = 0$$

$$\therefore \quad m(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) = -\frac{\mu m}{r^2} \quad , \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}(m r^2 \dot{\theta}) = 0 \Rightarrow m r^2 \dot{\theta} = const = C \qquad (2)$$

معادلات هاملتون :

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_2^2}{m r^3} - \frac{\mu m}{r^2} \quad (1), \qquad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad (2)$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m} \quad (3), \qquad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m r^2} \quad (4)$$

المعادلات (1)، (3) تكافئان المعادلة (1) من معادلات لاجرانج.

المعادلات (2)، (4) " " (2) " " " .

معادلات راوث :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial R}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m \dot{r}) - \frac{C}{m r^3} + \frac{\mu m}{r^2} = 0$$

كذلك: $\frac{\partial R}{\partial C} = -\dot{\theta}$

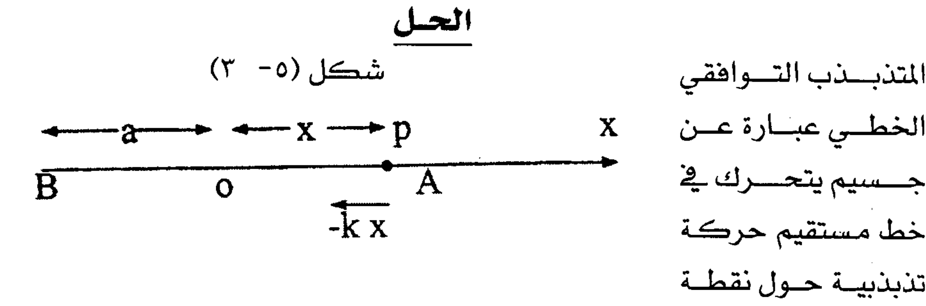
أي أن : $-\dot{\theta} = -\frac{C}{m r^2}$

مثال ٥:

أوجد معادلات هاملتون للمتذبذب. كذلك عين مسار النقطة الممكنة لحالة المتذبذب في فراغ الطور.

الحـل

المتذبـــذب التـــوافقي الخطـــي عبـــارة عـــن جـــسيم يتحـــرك في خط مستقيم حركة تذبذبيـة حـول نقطـة ثابتة o



شكل (٥- ٣)

على هذا الخط تحت تأثير قوة جاذبة نحوه مقدارها k x. نهايتي المسار هما النقطتين A ، B حيث oA = oB = a أو متسع الحركة.

معادلة حركة جسيم هي:

حيث a تسمى سعة الحركة

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x \quad , \; \frac{m}{m} = \omega^2$$

الزمن الدوري للحركة $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega}$ والتردد $\nu = \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{\omega}{2\pi}$

الإحداثي المهمل الوحيد هو $Q \equiv x$ والسرعة المعممة هي $\dot{q} = \dot{x}$ وهي نفس السرعة الحقيقية للجسيم.

طاقة الحركة هي : $T = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2$

طاقة الموضع هي : $V = -\int_0^x (-kx)\,dx = \frac{1}{2}kx^2$

كمية الحركة المعممة هي : $p = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$

وهي نفس كمية الحركة الحقيقية للجسيم ومنها $\dot{x} = \frac{p}{m}$

دالة لاجرانج: $L = T - V$

$$\therefore L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

معادلة لاجرانج:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx = 0$$

وهي نفس قانون نيوتن الثاني.

دالة هاملتون: $H = T + V$

$$\therefore H = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

معادلات هاملتون:

$$\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial x} = -kx \;, \qquad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

والمعادلتان تكافئان معاً معادلة لاجرانج.

فراغ الطور: في هذه الحالة فإن فراغ الطور يكون له بعدين فقط ومحورين هما محور x ومحور p. معادلة مسار النقطة الممثلة لحالة الجسيم في فراغ الطور هي :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 = \text{const.} = E$$

حيث $E = \frac{m\omega^2 a^2}{2}$ هي الطاقة الكلية للجسيم وتصبح المعادلة

$$\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}x^2=\frac{m\omega^2 a^2}{2}$$

or
$$\frac{p^2}{m^2\omega^2 a^2}+\frac{x^2}{a^2}=1$$

وهي معادلة قطع ناقص أنصاف أقطاره هي a، $m\omega a$ مع ملاحظة أن a هي سعة الحركة، $m\omega a$ هي كمية حركة الجسيم العظمى التي يكتسبها عند مروره بنقطة الأصل o.

مثال ٦:

أوجد معادلات هاملتون وراوث في حالة البندول الكروي.

الحل

درسنا قبل ذلك مسألة البندول الكروي وأوجدنا معادلات لاجرانج له.

دالة هاملتون للبندول الكروي هي: $H=T+V$

$$\therefore H=\frac{1}{2}m a^2\left(\dot\theta^2+\sin^2\theta\,.\,\dot\phi^2\right)-m g a\cos\theta$$

كمية الحركة المعممة :

$$p_1=\frac{\partial T}{\partial\dot\theta}=m a^2\dot\theta \quad , \; p_2=\frac{\partial T}{\partial\dot\phi}=m a^2\sin^2\theta\text{-}\dot\phi$$

ومنها

$$\dot\theta=\frac{p_1}{m a^2} \quad , \; \dot\phi=\frac{p_2}{m a^2\sin^2\theta}$$

ولكي تكون دالة هاملتون H في الصورة الصحيحة يجب أن تكون دالة في (θ,ϕ,p_1,p_2) أي يجب حذف $\dot\theta,\dot\phi$ منها

$$\therefore\; H=\frac{p_1^2}{2 m a^2}+\frac{p_2^2}{2 m a^2\sin^2\theta}-m g a\cos\theta$$

معادلات هاملتون:

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_2^2 \cos\theta}{m a^2 \sin^3\theta} - m g a \sin\theta \quad (1 \qquad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m a^2} \quad (3) \qquad \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m a^2 \sin^2\theta} \quad (4)$$

واضح أن ϕ هو إحداثي مهمل. أي أن :

$$p_2 = \text{const.} = C \quad \text{say}$$

المعادلتان (1)، (3) معاً يكافئان المعادلة الأولى من معادلات لاجرانج، المعادلتان (2)، (4) معاً يكافئان المعادلة الثانية من معادلات لاجرانج.

دالة راوث R يمكن كتابتها كالآتي : $R = L - C\dot{\phi}$

حيث الدالة R هي دالة في θ ، $\dot{\theta}$ ، C وعلى ذلك يجب حذف $\dot{\phi}$ منها

$$R = \frac{1}{2} m a^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta . \dot{\phi}^2\right) + m g a \cos\theta - C\dot{\phi}$$

وحيث أن:

$$\dot{\phi} = \frac{p_2}{m a^2 \sin^2\theta} = \frac{C}{m a^2 \sin^2\theta}$$

$$\therefore \; R = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 - \frac{C^2}{2 m a^2 \sin^2\theta} + m g a \cos\theta$$

معادلة راوث :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial R}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m a^2 \dot{\theta}) - \left[\frac{C^2 \cos\theta}{m a^2 \sin^3\theta} - m g a \sin\theta\right] = 0$$

$$\therefore \; m a^2 \ddot{\theta} - \frac{C^2 \cos\theta}{m a^2 \sin^3\theta} + m g a \sin\theta = 0 \qquad (5)$$

كذلك نجد أن :

$$\frac{\partial R}{\partial C} = -\dot{\phi}$$

أي أن :

$$-\frac{C}{m\, a^2 \sin^2\theta} = -\dot{\phi} \qquad (6)$$

وهي نفس المعادلة التي حصلنا عليها من قبل.

بحل المعادلة (5) واستخدام الشروط الابتدائية نحصل على $\theta \equiv \theta(t)$ وبتعويضها (6) والتكامل فإننا نحصل على $\phi \equiv \phi(t)$ وبذلك نكون قد حصلنا على الحل الكامل للمسألة أي بإيجاد θ، ϕ كدوال في الزمن t.

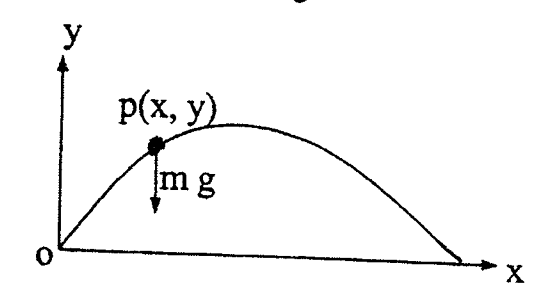
مثال ٧:

في حركة المقذوفات في وسط غير مقاوم اكتب معادلات لاجرانج وهاملتون وراوث.

الحل

بفرض أن كتلة الجسيم هي m، $p(x, y)$ موضع الجسيم عند اللحظة t.

شكل (٥- ٤)



طاقة الحركة للجسيم هي:

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right),$$

دالة الموضع هي: $V = m\, g\, y$

دالة لاجرانج هي: $L = T - V$

$$\therefore L = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - m\, g\, y$$

معادلات لاجرانج :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0\ , \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0$$

$$\therefore\ m\ddot{x}=0 \qquad (1), \qquad m\ddot{y}=-mg \qquad (2)$$

وهي المعادلات المعتادة التي نحصل عليها بتطبيق قانون نيوتن الثاني

دالة هاملتون: $H=T+V$

$$\therefore H=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+mgy$$

للحصول على دالة هاملتون الصحيحة يجب أن تكتب بدلالة x,y ، p_1, p_2 حيث

$$p_1=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\dot{x} \quad , \qquad p_2=\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=m\dot{y}$$

$$\therefore\ \dot{x}=\frac{p_1}{m} \quad , \quad \dot{y}=\frac{p_2}{m} \ \square$$

$$\therefore\ H=\frac{p_1^2}{2m}+\frac{p_2^2}{2m}+mgy \ \square$$

معادلات هاملتون :

$$\dot{p}_1=-\frac{\partial H}{\partial x}=0 \quad (i) \qquad \dot{p}_2=-\frac{\partial H}{\partial y}=-mg \quad (ii)$$

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p_1}=\frac{p_1}{m} \quad (iii) \qquad \dot{y}=\frac{\partial H}{\partial p_2}=\frac{p_2}{m} \quad (iv)$$

(i),(iii) تكافئان معاً المعادلة (1) من معادلات لاجرانج.

(ii) ، (iv) تكافئان معاً المعادلة (2) من معادلات لاجرانج.

يلاحظ أن L أو H أن x إحداثي مهمل وعلى ذلك فإن :

$$\dot{p}_1=0 \qquad \text{or } p_1=\text{const.}=C \ \text{ say}$$

دالة راوث: $R=L-C\dot{x}$

$$\therefore R = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - m g y - C \dot{x}$$

ويجب حذف $\dot{x}$ منها للحصول على دالة راوث الصحيحة

$$\left[R \equiv R(y, \dot{y}, C)\right]$$

$$\therefore \ R = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \frac{C^2}{2 m} - m g y$$

معادلة راوث: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial R}{\partial y} = 0$

or $m \ddot{y} + m g = 0$

وهي نفس المعادلة (2) من معادلات لاجرانج ومنها نحصل على y كدالة في t أما x (الإحداثي المهمل) فنحصل عليه من: $\frac{\partial R}{\partial C} = -\dot{x}$

$$\therefore \ -\frac{C}{m} = -\dot{x} \qquad \therefore \ \ddot{x} = 0$$

وهي نفس المعادلة (1) من معادلات لاجرانج.

مثال ٨:
في حالة قضيب منتظم حر الحركة حول أحد طرفيه الثابت. أوجد معادلات هاملتون وراوث.

الحل

وجدنا أن طاقتي الحركة والموضع يعطيان من: :

$$V = -mgacos\,\theta + const. \qquad T = \frac{2}{3} m a^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$$

حيث الإحداثيات المعممة هنا هي $q_1 = \theta$ ، $q_2 = \phi$

كميات الحركة المعممة:

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4}{3} m a^2 \dot{\theta}$$

$$\therefore \ \dot{\theta} = \frac{3 p_1}{4 m a^2}$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = \frac{4}{3} m a^2 \sin^2 \theta . \dot{\phi}$$

$$\therefore \ \dot{\phi} = \frac{3 p_2}{4 m a^2 \sin^2 \theta}$$

دالة هاملتون: $H = T + V$

$$\therefore H = \frac{3 p_1^2}{8 m a^2} + \frac{3 p_2^2}{8 m a^2 \sin^2 \theta} - m g a \cos \theta$$

معادلات هاملتون :

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{3 p_1^2 \cos \theta}{4 m a^2 \sin^3 \theta} - m g a \sin \theta \qquad (1)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \qquad (2)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{3 p_1}{4 m a^2} \qquad (3)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{3 p_2}{4 m a^2 \sin^2 \theta} \qquad (4)$$

المعادلتان (1)، (3) تكافئان المعادلة (1) من معادلات لاجرانج.

المعادلتان (2)، (4) تكافئان المعادلة (2) من معادلات لاجرانج.

واضح هنا أن الإحداثي المعمم ϕ هو إحداثي مهمل وعلى ذلك فإن :

$$\dot{p}_2 = 0 \quad \text{or} \quad p_2 = \text{const} = C \quad \text{say}$$

$$\therefore \ \frac{4}{3} m a^2 \sin^2 \theta . \dot{\phi} = C$$

$$\therefore \ \dot{\phi} = \frac{3 C}{4 m a^2 \sin^2 \theta} \qquad (*)$$

دالة راوث هي: $R = L - C \dot{\phi}$

$$\therefore R = \frac{2}{3} m a^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \, \dot{\phi}^2 \right) + m g a \cos \theta - C \dot{\phi}$$

يجب حذف، $\dot{\phi}$ من R للحصول على دالة راوث الصحيحة والتي تعتمد على $(\theta, \dot{\theta}, C)$

$$R = \frac{2}{3} m a^2 \dot{\theta}^2 - \frac{3C^2}{8 m a^2 \sin^2\theta} + m g a \cos\theta$$

معادلة راوث :
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial R}{\partial \theta} = 0$$

$$\therefore \frac{4}{3} m a^2 \ddot{\theta} - \frac{3C^2}{4 m a^2} \operatorname{cosec}^2\theta \cot\theta + m g a \sin\theta = 0$$

وهي نفس المعادلة (1) التي حصلنا عليها من معادلات لاجرانج. هذه المعادلة تعين θ كدالة في الزمن t وهناك معادلة أخرى تعين الإحداثي المهمل ϕ نحصل عليها من:

$$\frac{\partial R}{\partial C} = -\dot{\phi}$$

$$-\frac{3C}{4 m a^2 \sin^2\theta} = -\dot{\phi}$$

وهي نفس المعادلة (*) ونفس المعادلة (2) من معادلات لاجرانج.

مثال ٧:

في مسألة النحلة اكتب دالة راوث وأوجد معادلات راوث.

الحل

الإحداثيات المعممة في هذه الحالة هي زوايا أويلر:

$q_3 \equiv \psi$ ، $q_2 \equiv \phi$ ، $q_1 \equiv \theta$

السرعات المعممة هي $\dot{q}_3 \equiv \dot{\psi}$ ، $\dot{q}_2 \equiv \dot{\phi}$ ، $\dot{q}_1 \equiv \dot{\theta}$

كميات الحركة المعممة هي p_3 ، p_2 ، p_1

كما رأينا من دراستنا لمسألة النحلة من قبل أن :

$$T = \frac{1}{2} I_{11} \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta . \dot{\phi}^2\right) + \frac{1}{2} I_{33} \left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)^2 ,$$
$$V = m\, g\, h \cos\theta$$

دالة لاجرانج هي: $L = T - V$

$$\therefore L = \frac{1}{2} I_{11} \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta . \dot{\phi}^2\right) + \frac{1}{2} I_{33} \left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)^2 - m\, g\, h \cos\theta$$

واضح أن L لا تحتوي على الإحداثيين ϕ ، ψ وعلى ذلك فإنهما إحداثيات مهملة.

$$\therefore p_2 \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = I_{11} \sin^2\theta . \dot{\phi} + I_{33}\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)\cos\theta$$

$$p_2 = \text{const.} \quad \equiv I_{33}\, C_1 \quad \text{say} \qquad (1)$$

كذلك

$$p_3 \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = I_{33}\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)$$

$$p_3 = \text{const.} \quad \equiv I_{33}\, C_2 \quad \text{say} \qquad (2)$$

$$\therefore \quad \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta = C_2 \qquad (2)'$$

بالتعويض من (2) في (1)

$$\therefore \; I_{11} \sin^2\theta . \dot{\phi} + I_{33}\, C_2 \cos\theta = I_{33}\, C_1$$

$$\therefore \; \dot{\phi} = \frac{I_{33}\left(C_1 - C_2\cos\theta\right)}{I_{11}\sin^2\theta} \qquad (3)$$

نعين دالة راوث من

$$R = L - I_{33}\, C_1\, \dot{\phi} - I_{33}\, C_2\, \dot{\psi}$$

or $$R = \frac{1}{2}\dot{\theta}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{1}{2}\dot{\psi}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - V$$

$$R=\frac{1}{2}\left[I_{11}\dot{\theta}^2-I_{11}\sin^2\theta.\dot{\phi}^2-I_{33}\left(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta\right)\dot{\phi}\cos\theta\right.$$
$$\left.-I_{33}\left(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta\right)\dot{\psi}\right]-m\,g\,h\cos\theta$$

وبحذف $\dot{\phi}$ ، $\dot{\psi}$ من R حيث أن R يجب أن تكون دالة في $(\theta ، \dot{\theta} ، C_1 ، C_2)$ نحصل على

$$R=\frac{1}{2}[I_{11}\dot{\theta}^2-\frac{I_{33}(C_1-C_2\cos\theta)^2}{I_{11}\sin^2\theta}-I_{33}C_2^2]-m\,g\,h\cos\theta$$

معادلات راوث : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial R}{\partial\theta}=0$

$$\therefore I_{11}\ddot{\theta}-\left[\frac{I_{33}}{I_{11}}\frac{(C_1-C_2\cos\theta)(C_1\cos\theta-C_2)}{\sin^3\theta}+m\,g\,h\sin\theta\right]=0$$

هذه المعادلة تعين $\theta(t)$ أما ϕ فتتعين من (3) بالتكامل وبعد التعويض عن $\theta\equiv\theta(t)$ من المعادلة السابقة وأما ψ فتتعين بالتكامل من '(2)

$$\dot{\psi}=C_2-\dot{\phi}\cos\theta$$



التحويلات القانونية ومعادلة هاملتون – جاكوبى

Canonical transformations -The Hamilton – Jacobi-theory

* التحويلات القانونية أو تحويلات التماس
* الدوال المولدة
* شرط التحويلات القانونية
* معادلة هاملتون-جاكوبي
* أمثلة وتمارين

الفصل السادس

التحويلات القانونية ومعادلة هاملتون – جاكوبى

Canonical Transformations - The Hamilton – Jacobi-theory

أولا: التحويلات القانونية أو تحويلات التماس

Cannonical or Contact Transformations

تلعب التحويلات دورا رئيسيا في جعل عملية حل مسائل الديناميكا أكثر سهولة حيث يمكن تحويل معادلات الحركة إلى صورة أخرى يمكن معاملتها بسهولة أكبر من المعادلات الأصلية.

فلحل مسألة ديناميكية يجب صياغتها رياضياً وذلك باختيار الإحداثيات المعممة المناسبة وتكوين L,H ثم كتابة معادلات لاجرانج أو هاملتون ثم نحل هذه المعادلات. من ثم يتوقف سهولة الحل لمسائل الديناميكا عادة على الاختيار المناسب للإحداثيات المعممة (يمكن اختيار أنواع أخرى بينها إحداثيات مهملة) وواضح أنه كلما زادت الإحداثيات المهملة كلما زادت سهولة الحل الرياضي للمسألة.

وعلى سبيل المثال إذا أمكن تحويل مجموعة الإحداثيات المعممة q_α إلى مجموعة جديدة Q_α بحيث يكون بعض هذه الإحداثيات الجديدة مستترة أو مهملة (دورية) فيكون هذا تبسيط كبير ومطلوب. ومن أنواع التحويلات التي يمكن دراستها تلك التي لا تغير معادلات لاجرانج أو تلك التحويلات التي لا تغير معادلات هاملتون.

والآن فإذا فرضنا أن q_α, p_α هما الإحداثيات وكميات الحركة القديمة لنظام ديناميكي وأن Q_α, P_α هي المواضع وكميات الحركة الجديدة فإن معادلات التحويل من الإحداثيات القديمة والجديدة هي :

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t)$$
$$P_\alpha = P_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t)$$

ويمكن كتابتها في الصورة المبسطة :

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, t)$$
$$P_\alpha = P_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, t) \qquad (١)$$

التحويلات (١) تسمى بالتحويلات القانونية أو تلامسية إذا وجدت لها الدالة $\overline{H}(q_\alpha, p_\alpha, t)$ (دالة هاملتون) في الإحداثيات الجديدة P_α, Q_α بحيث يكون

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial Q_\alpha} \quad ، \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \overline{H}}{\partial P_\alpha} \qquad (٢)$$

وتكون دالة لاجرانج في كل من الإحداثيات القديمة والجديدة هي

$$L(q_\alpha, p_\alpha, t) \quad ، \quad \overline{L}(q_\alpha, p_\alpha, t)$$

عندئذ تكون دالة هاملتون الجديدة والقديمة هي

$$H = \sum_{\alpha=1}^{N} p_\alpha \dot{q}_\alpha \sum -L \ , \ \overline{H} = \sum_{\alpha=1}^{N} P_\alpha Q_\alpha - \overline{L}$$

ومعادلات لاجرانج القديمة والحديثة

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \ , \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{Q}_\alpha}\right) - \frac{\partial \overline{L}}{\partial Q_\alpha}$$

ملاحظات :

التحويلة (١) تجعل شكل معادلات الحركة لا تتغير من حيث شكلها الأصلي كما في معادلات لاجرانج وهاملتون.

تسمى التحويل $Q_\alpha = Q_\alpha(q, \dot{q}, t)$ بالتحويل النقطي Point Transformation ويلزم فيه تغيير عدد n من الإحداثيات المستقلة بعدد n من الإحداثيات الجديدة والمستقلة أيضا.

وبالطبع فإن دالة لاجرانج $\bar{L}$ في الإحداثيات الجديدة يكون لها نفس القيمة حيث أنها لا تزال تحكمها العلاقة $\bar{L} = T - V$ ؛ولكن شكل دالة لاجرانج قد يتغير ولذلك فهي $\bar{L}$ حيث:

$$\bar{L}(Q, \dot{Q}, t) = L(q, \dot{q}, t) = L - V$$

ومن الواضح أيضا أن معادلات لاجرانج تظل كما هي من ناحية الشكل بالنسبة للإحداثيات الجديدة. حيث تحتفظ معادلات الحركة السابقة بشكلها الأصلي. وحيث أن معادلات لاجرانج لا تتغير في هذا النوع من التحويل فإن معادلات هاملتون لا تتغير بدورها نتيجة لإجراء هذا النوع من التحويلات

ونظرا لأن دالة هاملتون $\mathbf{H(p,q,t)}$ لا تعتمد فقط على الإحداثيات المعممة q_α وإنما أيضا على كميات الحركة المعممة p_α وكل هذه المتغيرات مستقلة وعددها $2n$.

ولذلك فإن التحويلات عموما يمكن أن تنقلنا من المتغيرات القديمة (q_α, p_α) وعددها $2n$ إلى المتغيرات الجديدة (Q_α, P_α) وعددها $2n$ أيضا.

وهذه التحويلات العامة أشمل من التحويل النقطي في (١). ولذلك فإنه في حالة استخدام معادلات هاملتون فإننا نحتاج على وجه العموم لمعادلات التحويل (٢). وعموما إذا ما استخدمت هذه التحويلات الجديدة فإنه من الممكن ألا تحتفظ معادلات الحركة بشكلها القانوني . ولكن سوف ندرس فقط التحويلات التي تسمى قانونية والتي توجد لها دالة جديدة لهاملتون ولتكن $\bar{H}$ في الإحداثيات الجديدة بحيث تحقق العلاقتين في (٢)($\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_\alpha}$ ، $\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_\alpha}$) وفى هذه الحالة تسمى Q_α, P_α إحداثيات قانونية.

ملاحظات هامة:

- شرط أن التحويلات (١) قانونية هو أن :

$$\sum p_\alpha \, d q_\alpha - \sum P_\alpha \, d Q_\alpha$$

تفاضل تام.

ـ هناك التحويلات العكسية أي

$$p_\alpha = p_\alpha\,(Q_\alpha, P_\alpha, t) \quad , \qquad q_\alpha = q_\alpha\,(Q_\alpha, P_\alpha, t)$$

مثال ١:

برهن على أن التحويلات: $Q = \tan^{-1}(q/p) \quad , \quad P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$

تحويلات قانونية.

الحـل

لإثبات أن التحويلات قانونية يجب التحقق من أن :

$$\sum p_\alpha\, d\, q_\alpha \; - \sum P_\alpha\, d\, Q_\alpha$$

تفاضل تام.

في التحويلات المعطاة يكون

$$p\,d\,q - P\,d\,Q = p\,d\,q - \frac{1}{2}\left(p^2 + q^2\right)\frac{p\,d\,q - q\,d\,p}{p^2 + q^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(p\,d\,q + q\,d\,p\right) = d\left(\frac{p\,q}{2}\right)$$

وهو المطلوب.

حل آخر : بصفة عامة فإن: $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad , \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$

ولكن

$$\left.\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{\partial p}{\partial P}\dot{P} + \frac{\partial q}{\partial Q}\dot{Q} \\ \dot{q} &= \frac{\partial q}{\partial P}\dot{P} + \frac{\partial q}{\partial Q}\dot{Q} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

أيضاً

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q}&=\frac{\partial \overline{H}}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial q}+\frac{\partial \overline{H}}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q}\\ \frac{\partial H}{\partial p}&=\frac{\partial \overline{H}}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial p}+\frac{\partial \overline{H}}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial p}\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

من (١)، (٢)، (٣) ينتج أن :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \overline{H}}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial q}+\frac{\partial \overline{H}}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q}&=-\frac{\partial p}{\partial P}\dot{P}-\frac{\partial p}{\partial Q}\dot{Q}\\ \frac{\partial \overline{H}}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial p}+\frac{\partial \overline{H}}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial p}&=\frac{\partial q}{\partial P}\dot{P}+\frac{\partial q}{\partial Q}\dot{Q}\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

ما سبق كان بصفة عامة لأي تحويل (وبالنسبة للتحويل المعطى في المسألة) فإن:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial P}{\partial P}=p \quad , \frac{\partial P}{\partial q}=q\\ &\frac{\partial Q}{\partial p}=-\frac{q}{p^2+q^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial q}=\frac{p}{p^2+q^2}\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

كذلك بتفاضل معادلات التحويل المعطى بالنسبة إلى P، Q على الترتيب نحصل على :

$$1=p\frac{\partial p}{\partial P}+q\frac{\partial q}{\partial P} \quad ,0=p\frac{\partial q}{\partial P}$$

$$0=p\frac{\partial p}{\partial Q}+q\frac{\partial q}{\partial Q} \quad , \quad 1=\frac{p\dfrac{\partial p}{\partial Q}-q\dfrac{\partial q}{\partial Q}}{p^2+q^2}\qquad(6)$$

بحل المعادلات السابقة آنيا ينتج أن:

$$\frac{\partial p}{\partial P}=\frac{p}{p^2+q^2} \quad ,\frac{\partial q}{\partial P}=\frac{q}{p^2+q^2}$$

بالتعويض من (٥)،(٦) في (٤) نحصل على:

$$q\frac{\partial \overline{H}}{\partial P}+\frac{p}{p^2+q^2}\frac{\partial \overline{H}}{\partial Q}=-\frac{p}{p^2+q^2}\dot{P}-q\dot{Q}$$

$$p\frac{\partial \overline{H}}{\partial P}+\frac{q}{p^2+q^2}\frac{\partial \overline{H}}{\partial Q}=\frac{q}{p^2+q^2}\dot{P}+p\dot{Q} \tag{7}$$

بحل المعادلتين في (٧) نلاحظ أنها تتحقق إذا كان:

$$\dot{P}=-\frac{\partial \overline{H}}{\partial Q} \quad , \quad \dot{Q}=\frac{\partial \overline{H}}{\partial P}$$

٥-٢ الدوال المولدة Generating Functions

من مبدأ هاملتون فان كل من التحويلات القانونية القديمة والجديدة (التحويل القانوني $Q_\alpha=Q_\alpha(q_\alpha,p_\alpha,t)$ ؛ $P_\alpha=P_\alpha(q_\alpha,p_\alpha,t)$) يجب تحقق الشرط:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\overline{L}\,dt=0 \quad ,\delta\int_{t_1}^{t_2}L\,dt=0 \tag{8}$$

بالطرح ينتج أن:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(L-\overline{L})dt=0 \tag{9}$$

$$\therefore \delta\int_{t_1}^{t_2}(L-\ell)dt=0$$

وهذا يتحقق في الحالتين التاليتين:

(i) الكميات تحت علامة التكامل واحدة أي أن: $L=\overline{L}$

(ii) أو يكون الفرق بينهم هو على الأكثر تفاضل تام لدالة اختيارية G في الزمن وإحداثيات العموم القديمة والجديدة أي أن:

$$L-\bar{L}=\frac{dG}{dt} \qquad (10)$$

$$\therefore \delta\int_1^2 (L-\bar{L})dt=\delta\int_1^2 \frac{dG}{dt}dt$$

$$\delta\int_1^2 dG=\delta\{G(t_2)-G(t_1)\}=0$$

وذلك لأن الفرق بين التكاملين مقدارا ثابتا يساوى الفرق بين قيمتي الدالة G عند حدود التكامل. تسمى الدالة G بالدالة المولدة للتحويل Generating function وذلك لأنه متى علمت الدالة G فإن معادلات التحويل تتحدد تماما. ولكي يحدث هذا التحويل يجب أن تكون G دالة في الإحداثيات القديمة والجديدة والزمن أي $G=G(q_\alpha, p_\alpha, Q_\alpha, P_\alpha, t)$ ولكن في الحقيقية عدد $2(n+1)$ فقط من المتغيرات مستقلة لأنه من المفروض أن معادلات التحويل وعددهم $2n$ تربط بين هذه المتغيرات لذا يكفي أن تكون G دالة في عدد $2(n+1)$ فقط من الـ $4(n+1)$ متغيرات السابقة والتي يمكن اختيارهم بأربعة طرق : (الصور الأربع الأساسية الآتية للدالة المولدة للتحويل):

$$(i)G_1(q,Q,t) \quad , \qquad (ii)G_2(q,P,t)$$

$$(iii)G_3(p,Q,t) \quad , \qquad (iv)G_4(p,P,t)$$

وحتى يمكن التعرف على هذه الدوال فإننا نعود للمعادلة:

$$L-\bar{L}=\frac{dG}{dt}$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة:

$$(\sum_{s=1}^{n} p_s dq_s - H(p,q,t)dt) - (\sum_{s=1}^{n} P_s dQ_s - \bar{H}(Q,p,t)dt) = dG$$

والتي يمكن إعادة صياغتها على النحو التالي:

$$dG=\sum_s (p_s dq_s - P_s dQ_s) + (\bar{H}-H)dt \qquad (11)$$

أولا: إذا كانت $G_1 = G_1(q_\alpha, Q_\alpha, t)$

في هذه الحالة الدالة G تعتمد على المواضع القديمة والجديدة والزمن وفيها يمكن الحصول علي التحويل من:

$$p_\alpha = \frac{\partial G_1}{\partial q_\alpha} \ , P_\alpha = -\frac{\partial G_1}{\partial Q_\alpha} \ , \overline{H} = H + \frac{\partial G_1}{\partial t}$$

البرهان :

$$\because \ \frac{d G_1}{d t} = L - \overline{L} = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - H - \sum P_\alpha Q_\alpha - \overline{H} \qquad (2)$$

إذن

$$\therefore d G_1 = \sum \left(p_\alpha dq_\alpha - P_\alpha \, d Q_\alpha\right) + \left(\overline{H} - H\right) d t \qquad (3)$$

وحيث أن $G_1 = G_1(q_\alpha, Q_\alpha, t)$ فإن

$$d G_1 = \sum \frac{\partial G_1}{\partial q_\alpha} d q_\alpha + \sum \frac{\partial G_1}{\partial Q_\alpha} d Q_\alpha + \frac{\partial G_1}{\partial t} d t \qquad (4)$$

بمقارنة (٤)، (٥) نحصل على :

$$p_\alpha = \frac{\partial G_1}{\partial q_\alpha} \ , \ P_\alpha = -\frac{\partial G_1}{\partial Q_\alpha} \ , \qquad \overline{H} - H = \frac{\partial G_1}{\partial t} \qquad (5)$$

ويمكن الحصول على أن :

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial Q_\alpha} \qquad , \qquad \dot{Q}_\alpha = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial P_\alpha}$$

حيث أن $\overline{H}$ تمثل دالة هاملتون في الإحداثيات P_α, Q_α وبالتالي تتحقق معادلات هاملتون كما سبق إثباتها.

يلاحظ أن الطرف الثاني من المعادلة (٥) دالة في P_α, Q_α . وحيث أن هدفنا من استخدام الدوال المولدة الحصول على دوال التحويل وهي

$$Q_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t) \quad , \qquad P_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t)$$

فإن المعادلات $p_\alpha = \dfrac{\partial G_1}{\partial q_\alpha}$ تصبح فيها المجاهيل هي Q_α وبحل هذه المعادلات نحصل على دوال التحويل الأولى وهي $Q_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t)$ وبالتعويض فى المعادلة $P_\alpha = -\dfrac{\partial G_1}{\partial Q_\alpha}$ نحصل على دوال التحويل الثانية $P_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t)$ وبالتعويض في المعادلات $\overline{H} = H + \dfrac{\partial G}{\partial t}$ نحصل على $\overline{H}$ كذلك في P_α, Q_α, t وذلك بعد أن نكون قد أوجدنا دوال التحويل العكسي $q_\alpha(P_\alpha, Q_\alpha, t)$ ، $p_\alpha(P_\alpha, Q_\alpha, t)$.

مثال ٢:

إذا كانت لدينا منظومة ميكانيكية لها دالة هاملتون على الصورة:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

حيث m, ω كميات ثابتة. استخدم الدالة المولدة للتحويل التالية:

$$G_1 = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot anQ$$

لإيجاد التحويلات القانونية - ثم أوجد دالة هاملتون الجديدة وأكتب معادلات هاملتون القانونية في المتغيرات الجديدة.

الحل

من الواضح أن: $G_1(q, Q) = \dfrac{m\omega}{2} q^2 \cot anQ$

فهي من النوع الأول من التحويلات والتي فيها:

$$p = \frac{\partial G_1}{\partial q}, \qquad (1)$$

$$P = -\frac{\partial G_1}{\partial Q} \qquad (2)$$

وأيضا Q_1 لا تعتمد على الزمن فيكون:

$$\frac{\partial G_1}{\partial t} = 0 = \overline{H} - H \Rightarrow \overline{H} = H \qquad (3)$$

فيكون من المعادلة (١) أن:

$$p = \frac{\partial G_1}{\partial q} \Rightarrow p = m\omega q \cot an Q \qquad (4)$$

$$\because \quad P = -\frac{\partial G_1}{\partial Q}$$

$$\therefore \quad P + \frac{m\omega}{2} q \operatorname{cosec}^2 Q = \frac{m\omega}{2} q^2 \frac{1}{\sin^2 Q}$$

$$= \frac{m\omega}{2} q^2 (1 + \cot an^2 Q)$$

$$= \frac{m\omega}{2} q^2 (1 + \frac{p^2}{m^2\omega^2 q^2}) \qquad (5)$$

$$P = \frac{1}{2m\omega}(p^2 + m^2\omega^2 q^2) \qquad (6)$$

وكذلك من (٤) نجد أن:

$$Q = \cot an^{-1}\left(\frac{p}{m\omega q}\right)$$

وهذه هي المتغيرات الجديدة Q, P بدلالة المتغيرات القديمة والتي تسمى بالتحويلات القانونية. وكذلك لإيجاد دالة هاملتون الجديدة نجد من (٣) أن:

$$\overline{H} = H$$

$$\overline{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

ولكن يجب الآن التعبير عن q, p بدلالة المتغيرات الجديدة فنجد أن:

$$\overline{H} = \frac{1}{2m}(m^2\omega^2 \cot an^2 Q(\frac{2}{m\omega} P \sin^2 Q) + \frac{m\omega^2}{2}(\frac{2}{m\omega} P \sin^2 Q)$$

$$\overline{H} = \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q$$

$$\overline{H} = \omega P(\cos^2 Q + \sin^2 Q)$$

$$\overline{H} = \omega P$$

وهذه هي دالة هاملتون الجديدة.

أما معادلات هاملتون الجديدة تصبح:

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega \quad \Rightarrow \quad Q = (\omega t + \alpha)$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \quad \Rightarrow \quad P = \text{const.}$$

وليكن $P = \frac{E}{\omega}$

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha)$$

وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة في بعد واحد.

ثانيا: إذا كانت $G_2 = G_2(q_\alpha, P_\alpha, t)$

الدالة G تعتمد على الإحداثي المعمم القديم وكمية الحركة الجديدة والزمن.

مما سبق نعلم أن :

$$d G_1 = \sum p_\alpha \, d q_\alpha - \sum P_\alpha \, d Q_\alpha - (\overline{H} - H) d t$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة

$$d G_1 = \sum \dot{p}_\alpha \, d q_\alpha - d \sum P_\alpha Q_\alpha + \sum Q_\alpha \, d P_\alpha + (\overline{H} - H) \qquad (8)$$

ومنها

$$d[G_1 + \sum P_\alpha Q_\alpha] = \sum p_\alpha q_\alpha + \sum Q_\alpha \, d P_\alpha + (\overline{H} - H) d t \qquad (9)$$

وحيث أن الطرف الأيمن تتواجد فيه $d t, p_\alpha, d q_\alpha$ وأن G_2 هي دالة في المتغيرات t, p_α, q_α بذلك نستطيع وضع

$$G_2 = G_1 + \sum P_\alpha, Q_\alpha \qquad (10)$$

أي أن

$$G_2(q_\alpha, p_\alpha, t) = G_1(q_\alpha, Q_\alpha, t) + \sum P_\alpha Q_\alpha$$

والمعادلة (٩) تصبح

$$dG_2 = \sum p_\alpha \, dq_\alpha + \sum Q_\alpha \, dP_\alpha + (\overline{H} - H)dt \tag{11}$$

وحيث $G_2 = G_2(p_\alpha, q_\alpha, t)$ فيكون

$$dG_2 = \sum \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum \frac{\partial Q_\alpha}{\partial P_\alpha} dp_\alpha + \frac{\partial G_2}{\partial t} dt \tag{12}$$

من المعادلة (١١)، (١٢) نحصل على

$$p_\alpha = \frac{\partial G_2}{\partial q_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial G_2}{\partial p_2}, \quad \overline{H} - H = \frac{\partial G_2}{\partial t} \tag{13}$$

بحل المعادلات $p_\alpha = \frac{\partial G_2}{\partial q_\alpha}$ نحصل على p_α كدالة في q_α, P_α, t ثم نعوض في المعادلات $Q_\alpha = \frac{\partial G_2}{\partial p_\alpha}$ نوجد Q_α كدالة في P_α, q_α, t ونحصل بذلك على معادلات التحويل ثم نوجد $\overline{H}$ بالتعويض في $\overline{H} = H + \frac{\partial G_2}{\partial t}$

ثالثاً: إذا كانت $G_3 = G_3(p_\alpha, Q_\alpha, t)$

الدالة G دالة في كمية الحركة المعممة القديمة p_α ، والإحداثي المعمم الجديد Q_α والزمن t.

البرهان :

$$\because \; dG_1 = \sum p_\alpha \, dq_\alpha - \sum P_\alpha \, dQ_\alpha - (\overline{H} - H)dt$$

والتي يمكن وضعها كالآتي :

$$dG_1 = d\sum p_\alpha \, dq_\alpha - \sum q_\alpha \, dP_\alpha - \sum P_\alpha \, dQ_\alpha + (\overline{H} - H)dt$$

إذا

$$d\left[dG_1+\sum p_\alpha q_\alpha\right]=\sum P_\alpha\, dQ_\alpha-\sum q_\alpha\, dp_\alpha+\left(\overline{H}-H\right)dt$$

وبنفس الطريقة السابقة في G_2 نكتب

$$G_2\left(p_\alpha,Q_\alpha,t\right)=G_1\left(q_\alpha,Q_\alpha,t\right)-\sum p_\alpha q_\alpha$$

أي أن

$$dG_3-\sum q_\alpha\, dp_\alpha-\sum p_\alpha\, dQ_\alpha+\left(\overline{H}-H\right)dt$$

كذلك يكون لدينا

$$dG_3=\sum\frac{\partial G_3}{\partial p_\alpha}dp_\alpha+\sum\frac{\partial G_3}{\partial Q_\alpha}dQ_\alpha+\frac{\partial G_3}{\partial t}dt$$

ومن ثم تصبح المعادلات التي بمقتضاها يتولد التحويل القانوني كالآتي

$$q_\alpha=-\frac{\partial G_3}{\partial p_\alpha}\quad,\quad P_\alpha=\frac{\partial G_3}{\partial Q_\alpha}\quad,\ \overline{H}-H=\frac{\partial G_3}{\partial t}$$

وبحل المعادلة $q_\alpha=-\frac{\partial G_3}{\partial p_\alpha}$ نوجد $Q_\alpha=Q_\alpha\left(q_\alpha,p_\alpha,t\right)$ وبالتعويض في $P_\alpha=\frac{\partial G_3}{\partial Q_\alpha}$ نحصل على $P_\alpha=P_\alpha\left(q_\alpha,p_\alpha,t\right)$ ومن ثم بالتعويض في $\overline{H}-H=\frac{\partial G_3}{\partial t}$ نحصل كذلك على معادلات التحويل القانوني والمعادلة الخاصة بـ $\overline{H}$.

رابعا: إذا كانت $G_4=G_4\left(p_\alpha,P_\alpha,t\right)$

في هذه الحالة يكون

$$q_\alpha=-\frac{\partial G_4}{\partial p_\alpha}\quad,\quad Q_\alpha=\frac{\partial G_4}{\partial p_\alpha}\quad,\ \frac{\partial G_4}{\partial t}=\overline{H}-H$$

وبحل معادلة q_α نوجد $p_\alpha = p_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, t)$ ثم نعوض في معادلة Q_α لإيجادها كدالة في $Q_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, t)$ ثم نوجد $\overline{H}$.

البرهان :

إذا كانت الدالة المولدة للتحويل على الصورة:

$$G_4 = G_4(p_s, P_s, t) \qquad (1)$$

مما سبق:

$$dG = \sum_s (p_s dq_s - P_s dQ_s) + (\overline{H} - H)dt \qquad (2)$$

لكن التفاضل الكلى (أو التام) للمعادلة (١) يعطى:

$$dG_4 = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial G_4}{\partial p_s}dp_s + \frac{\partial G_4}{\partial P_s}dP_s\right) + \frac{\partial G_4}{\partial t}dt \qquad (3)$$

وبالنظر إلى (٢)،(٣) نجد أنه تصعب المقارنة على هذا النحو لذا نضيف للطرف الأيسر في المعادلة (٢) الحدين $Q_s dP_s$ ، $q_s dp_s$ ثم نطرحهما فنجد أن:

$$dG = \sum_{s=1} \{(p_s dq_s + q_s dp_s - q_s dp_s) + (-P_s dQ_s - Q_s dP_s + Q_s dP_s)\} + (\overline{H} - H)dt$$

والتي يمكن إعادة صياغتها على النحو التالي:

$$dG = \sum_{s=1} \{d(p_s q_s) - d(P_s Q_s) - q_s dp_s + Q_s dP_s\} + (K - H)dt$$

أو:

$$d[G + \sum_{s=1} (P_s Q_s - p_s q_s)] = \sum_{s=1}^{n} (-q_s dp_s + Q_s dP_s) + (\overline{H} - H)dt \qquad (4)$$

بمقارنة (٣)،(٤) نجد أن:

$$q_s = -\frac{\partial G_4}{\partial p_s}, Q_s = -\frac{\partial G_4}{\partial P_s},$$

$$\frac{\partial G_4}{\partial t} = \overline{H} - H, G_4 = G + \sum_{s=1}^{n}(P_s Q_s - p_s q_s)$$

٥-٣ شرط التحويلات القانونية (التحويلات الفيصلية أو تحويلات التماس)

التحويل:

$$P_\alpha = P_\alpha(p_s, q_s, t), Q_\alpha = Q_\alpha(p_s, q_s, t)$$

يكون قانونيا إذا كان:

$$\sum_\alpha (p_\alpha dq_\alpha - P_\alpha dQ_\alpha)$$

هو تفاضل تام في المتغيرات q_s, p_s أي أنه:

$$\sum_\alpha (p_\alpha dq_\alpha - P_\alpha dQ_\alpha) = dW(q_\alpha, p_\alpha) \qquad (1)$$

وتسمى الدالة W بالدالة المميزة للتحويل .Characteristic Function ويجب ملاحظة أن الدالة W مع أنها يمكن أن تعتمد على الزمن t فإننا لم نبين ذلك في المتغيرات التي تعتمد عليها وذلك لأن المقصود أن يكون الطرف الأيسر في المعادلة هو تفاضل تام بالنسبة للمتغيرات q_α, p_α فقط وعلى ذلك فإن:

$$dW = \sum_\alpha \left(\frac{\partial W}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial W}{\partial p_\alpha} dp_\alpha\right) \qquad (2)$$

ومن هاتين المعادلتين (١)،(٢) يمكن إيجاد المشتقات الجزئية للدالة W بالنسبة للمتغيرات القانونية القديمة أي الكميات:

$$\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}, \frac{\partial W}{\partial p_\alpha}$$

وبإجراء التكاملات عليها يمكن إيجاد الدالة المميزة للتحويل W.

ملخص ما سبق

اختبار قانونية التحويل

(١) إذا كانت معادلات هاملتون تحتفظ بصورتها المعتادة إذا كتبت بدلالة الإحداثيات القانونية الجديدة كما كانت مكتوبة بدلالة الإحداثيات القانونية القديمة (أي لا تغيرية) تحت تأثير التحويل القانوني.

(٢) إذا كان التكامل السطحي $\iint_S \sum_{\alpha=1}^{n} d q_\alpha \, d p_\alpha$ (لا تغيري) تحت تأثير التحويل القانوني (السطح S مرسوم في فراغ الطور ويقع في مقطع من هذا الفراغ تتعين فيه النقط من قيم الإحداثيات القانونية p_α, q_α) نظرية بوانكاريه.

(٣) عندما تكون الدالة المولدة هي إحدى الدوال الآتية والتي تكون معادلات التحويل بين الإحداثيات القديمة p, q والجديدة P, Q لا يظهر فيها الزمن صراحة:

$$G_1 = G_1(q\,Q), \qquad G_2 = G_2(q, P) = G_1 + P\,Q$$

$$G_3 = G_1 - p\,q = G_3(p, Q), \qquad G_4 = G_4(p, P) = G_1 + P\,Q - p\,q$$

وهذا يعنى انه يمكن الحصول على أي دالة مولدة إذا علمت أي الدوال المولدة وفى هذه الحالة أيضا نلاحظ أن $\overline{H} = H$.

فلكي يكون التحويل قانونياً يجب أن تتواجد دالة مولدة له أي يتحقق إحدى العلاقات التالية :

$$p = \frac{\partial G_1}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial G_1}{\partial Q} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial Q} = -\frac{\partial P}{\partial q}$$

$$p = \frac{\partial G_2}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial G_2}{\partial p} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial P} = \frac{\partial Q}{\partial q}$$

$$q = -\frac{\partial G_3}{\partial p}, \quad p = -\frac{\partial G_3}{\partial Q} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial P} = -\frac{\partial Q}{\partial q}$$

$$q = -\frac{\partial G_4}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial Q}{\partial p} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial q}{\partial p} = -\frac{\partial Q}{\partial p}$$

بأسلوب آخر لكي يكون التحويل قانونياً يجب أن تكون أي صيغة من الصيغ الآتية تفاضلاً تاماً

$$p\,dq - P\,dQ \quad , \qquad p\,dq + Q\,dP$$
$$-q\,dP - P\,dQ \quad , \qquad -q\,dp - Q\,dP$$

هناك شروط أخرى تُبنى على أقواس بواسون وأقواس لاجرانج لاختبار قانونية التحويل وسنذكرها فيما بعد.

٥-٣ أمثلة

مثال ١:

أثبت أن التحويل

$$p = \sqrt{2P\omega}\,\cos Q \quad , q = \sqrt{\frac{2P}{\omega}}\,\sin Q \qquad (1)$$

تحويل قانوني وإذا كانت دالة هاملتون للمتذبذب التوافقي تعطى في الصورة $H = \frac{p^2}{2m}\ \frac{\partial r_v}{\partial q_\alpha}$ حيث $\omega = \sqrt{m\lambda}$ اكتب هذه الدالة بدلالة الإحداثيات الجديدة P, Q وبين أن Q إحداثي مهمل (دوري). أوجد معادلات هاملتون وأثبت أنها تمثل حركة متذبذب توافقي.

الحـل

إحدى الطرق لإثبات التحويل المعطى (١) هو تحويل قانوني هو إثبات أن $p\,dq - P\,dQ$ تمثل تفاضل تام ومن ثم نحاول حساب ذلك

$$p\,dq - P\,dQ = \sqrt{2P\omega}\,\cos Q\{\frac{\sin Q}{\sqrt{2P\omega}}\,dP + \sqrt{\frac{2P}{\omega}}\,\cos Q\,dQ\}$$
$$-P\,dQ$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2Q\,dP + \left(2\cos^2 Q - 1\right)P\,dQ$$
$$= \frac{1}{2}\ \sin 2Q\,dP + (\cos 2Q)\,P\,dQ$$

$$= d\left(\frac{1}{2}P\sin 2Q\right)$$

وهذا يثبت أن التحويل قانوني.

المطلوب الثاني إيجاد H بدلالة الإحداثيات P, Q

$$\because\ H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\lambda\ q^2$$

نستخدم التحويلات (١) في التعويض في H نحصل على

$$H = \frac{\lambda}{\omega}P\cos^2 Q + \frac{\lambda}{\omega}P\sin^2 Q == \frac{\lambda}{\omega}P$$

وهنا نلاحظ أنH لا تحتوي على Q صراحة فإن Q هو إحداثي مهمل (دوري).

وتصبح معادلات هاملتون

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \text{const.}$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{\lambda}{\omega} = \alpha \quad \text{, where } \alpha / s \text{ const.}$$

$$\Rightarrow Q = \alpha t + \varepsilon$$

ومن ثم فإن

$$q = A\sin(\alpha t + \varepsilon)$$

حيث A ثابت $\left(=\sqrt{2P/\omega}\right)$ وهذا الحل واضح أنه دالة دورية وهو الحل للمتذبذب التوافقي.

مثال ٢:

أوجد التحويل القانوني الذي له الدالة المولدة $G = \frac{m\omega}{2}q^2\cot Q$ حيث m, ω ثوابت. ثم استخدام هذا التحويل لحل مسألة المتذبذب التوافقي الخطي الذي m كتلته، $m\omega^2$ تمثل ثابت القوة المؤثرة عليه حيث $\omega = 2\pi\nu$ حيث ν التردد للحركة. نفرض أنه بدأ الحركة من السكون على بعده a من مركز القوة.

الحل

واضح أن G دالة في Q, q ومن ثم

$$p=\frac{\partial G}{\partial q}=m\,\omega\,q\cot Q \;\;;\;\; P=-\frac{\partial G}{\partial Q}=\frac{m\,\omega}{2}q^2\operatorname{cosec}^2 Q \qquad (1)$$

من المعادلات (١) نحصل على

$$Q=\cot^{-1}\frac{p}{m\,\omega\,q} \quad , \quad P=\frac{p^2+m^2\omega^2q^2}{2\,m\,\omega} \qquad (2)$$

والتحويل العكسي للمعادلات (٢)

$$q=\frac{\sqrt{2P}}{m\,\omega}\sin Q \quad , \quad p=\sqrt{2\,P\,m\,\omega}\;\cos Q \qquad (3)$$

واضح من المعادلات (٢)، (٣) أن التحويل قانوني لأن

$$p\,dq-P\,dQ$$

تمثل تفاضل تام وهذا سهل إثباته.

لحل مسألة المتذبذب التوافقي نوجد H بدلالة الإحداثيات القديمة p, q فيكون

$$H=\frac{p^2}{2\,m}+\frac{m\,\omega^2}{2}q^2=\text{const.}=E$$

حيث أن G لا تحتوي على الزمن صراحة فيكون

$$\overline{H}=H$$

فيكون صياغة المسألة باستخدام التحويل القانوني بدلالة الإحداثيات الجديدة P, Q هي :

$$\overline{H}=\frac{1}{2}m\left(\sqrt{2\,P\,m\,\omega}\cos Q\right)^2+\frac{m\,\omega^2}{2}\left[\sqrt{\frac{2\,P}{m\,\omega}}\sin Q\right]^2$$

$$\overline{H}=\omega\,P=E$$

واضح دالة هاملتون الجديدة في صورة بسيطة وفيها الإحداثي المعمم Q إحداثي مهمل كما أن كمية الحركة الجديدة P تظل ثابتة أثناء الحركة لأن $P=\frac{E}{\omega}=\text{const.}$

معادلات هاملتون في الإحداثيات الجديدة تكون

$$\dot{Q}=\frac{\partial H}{\partial p}=\omega=\text{ const.} \quad , \quad \dot{P}=-\frac{\partial \overline{H}}{\partial Q}=0$$
$$Q=\omega t+\varepsilon \quad , P=\text{const.}$$

ولكن

$$q=\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin(\omega t+\varepsilon)$$

وعند $t=0$ كانت $q=a$ ، $p=0$ ، $E=\frac{m\omega^2 a^2}{2}$ ويكون

$$\varepsilon=Q=\cot^{-1}0=\frac{\pi}{2}$$
$$=a\cos\omega t$$

$$p\,dq=P\,dQ=P\,dq-(q\cot p)\frac{q}{\sin p}(q\cos p\,dp-\sin p\,dq)/q^2$$
$$=(p+\cot p)\,dq-q\cot^2 p\,dq$$
$$=L\,dq+M\,dp$$

مثال٣:

أوجد التحويل القانوني الذي دالته المولدة هي

$$G=\frac{1}{2}\left[-Q\sqrt{q-Q^2}\right]+q\cos^{-1}\frac{Q}{\sqrt{q}}$$

الحل : نلاحظ أن $G=G(q,Q)$ فيكون

$$p=\frac{\partial G}{\partial q}=\frac{1}{2}\left[-\frac{Q}{2\sqrt{q-q^2}}+\cos^{-1}\frac{Q}{\sqrt{q}}+\frac{Q}{2\sqrt{q-Q^2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{Q}{\sqrt{q}}$$

$$-P=\frac{\partial G}{\partial Q}=\frac{1}{2}\left[-\frac{q+Q^2+Q^2-q}{\sqrt{q-Q^2}}\right]$$

$$\therefore\ P=\sqrt{q-Q^2}$$

إذن $Q=\sqrt{q}\cos 2p\ ,\quad P=\sqrt{q}\sin 2p$

وهو التحويل القانوني المطلوب.

مثال٤:

أثبت أن التحويل: $Q=\ln[(\sin p)/q] \quad P=q\cot p \quad ,$

قانوني وأوجد الدالة المولدة له G.

الحـل

نحاول إثبات أن $p\,d\,q-P\,d\,Q$ يمثل تفاضل تام والذي يثبت أن التحويل قانوني كالآتي :

$$p\,d\,q-P\,d\,Q=p\,d\,q-(q\cot p)\frac{q}{\sin p}(q\cos p\,d\,p-\sin p\,d\,q)/q^2$$

$$=(p+\cot p)\,d\,q-q\cot^2 p d\,q$$

$$=L\,d\,q+M\,d\,p$$

حيث $L=p\cot p\ ,\qquad M=-q\cot^2 p$

فإذا كان $\frac{\partial L}{\partial p}=\frac{\partial M}{\partial q}$

حصلنا على المطلوب وهو واضح من الآتي

$$\frac{\partial L}{\partial p}=1-\mathrm{cosec}^2\,p=-\cot^2 p$$

$$\frac{\partial M}{\partial q}=-\cot^2 p$$

يتضح مما سبق أن التحويل قانوني.

لإيجاد دالة التحويل Q :

هنا $G = G(p, P)$

$$\frac{\partial G}{\partial p} = -q = -P\tan p$$

$$G = P\ln\cos p + f(P)$$

$$\frac{\partial G}{\partial p} = Q = \ln\frac{\cos p}{P} = \ln\cos p - \ln P$$

$$G = P\ln\cos p - \left[P\ln p - \int dP\right]$$

$$= P\ln\cos p - P\ln P + P + F(p)$$

نختار $F(p) = 0$ ، $F(p) = P(1 - \ln P)$ إذا

$$G = P\ln\cos p + P(1 - \ln P)$$

مثال ٥:

أوجد قيم a, b حتى يكون التحويل الآتي قانوني

$$Q = q^a \cos b\,p \quad , \quad P = q^a \sin \beta\, p$$

ثم أوجد الدالة المولدة G.

الحل

نلاحظ أن G دالة في P، Q من ثم بتطبيق الشرط

$$\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1$$

إذن

$$\left(a\,q^{\alpha-1}\cos b\,p\right)\left(q^a\cos b\,p\right) + \left(q^a\, b\sin p\, b\right)\left(a\,q^{a-1}\sin b\,p\right) = 1$$

$$\therefore\ a\,b\,q^{2a-1} = 1$$

واضح أن $2a - 1 = 0$ ، $a\,b = 1$

ومنها $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$

ويكون التحويل القانوني هو

$$Q = \sqrt{q}\cos 2p \quad , \quad P = \sqrt{q}\sin 2p$$

لإيجاد الدالة G

$$\frac{\partial G}{\partial p} = -q = -Q^2 \sec^2 2p \Rightarrow G = = -\frac{Q^2}{2}\tan 2p + f(Q)$$
$$\frac{\partial G}{\partial Q} = -p = -Q \tan 2p \Rightarrow G = \frac{-Q}{2}\tan 2p + g(p)$$

باختيار $f = g = 0$ فيكون

$$G = -\frac{Q^2}{2}\tan 2p$$

مثال ٦:

أثبت أن التحويل: $Q = \tan^{-1}(\frac{q}{p}), P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ يكون قانونيا.

الحل

حسب الشرط السابق يكون التحويل قانونيا إذا كان:

$$\sum_\alpha (p_\alpha dq_\alpha - P_\alpha dQ_\alpha) \qquad (1)$$

تفاضلا تاما.

$$\therefore dQ = \frac{\partial Q}{\partial q}dq + \frac{\partial Q}{\partial p}dp = \frac{pdq - qdp}{[1 + (\frac{q}{p})^2 p^2]}$$

إذن الشرط (١) يمكن كتابته على الصورة التالية:

$$pdq - \frac{1}{2}(p^2 + q^2)\frac{pdq - qdp}{[1 + (\frac{q}{p})^2]p^2}$$
$$= pdq - \frac{1}{2}pdq + \frac{1}{2}qdp$$
$$= \frac{1}{2}pdq + \frac{1}{2}qdp$$

وهذا تفاضل تام $= d(\frac{1}{2}pq)$

إذن التحويل السابق هو تحويلا قانونيا.

ملاحظة هامة:

إذا كانت:

$$Q = Q(p,q) \quad , \quad P = P(p,q)$$

وكانت دالتي هاملتون على الصورة:

$$H = H(p,q) \quad , \quad K = K(p,q)$$

فإن معادلات هاملتون هي:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} \quad , \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}$$

فإنه يمكن وضع الشرط التالي لكي يكون التحويل السابق قانونيا:

$$J = \frac{\partial(P,Q)}{\partial(p,q)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{vmatrix} = 1$$

وتعميم هذه الملاحظة صحيح وتنص على أن الجاكوبيان للتحويل القانوني يكون مساويا للوحدة.

مثال ٧:

استخدم الشرط السابق في إثبات أن التحويل التالي:

$$P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \quad , \quad Q = \tan^{-1}(\frac{q}{p})$$ تحويلا قانونيا

الحل

$$\frac{\partial P}{\partial p}=p,\frac{\partial P}{\partial q}=q$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p}=\frac{1x(-\frac{q}{p^2})}{1+\frac{q^2}{p^2}}=\frac{-q}{p^2+q^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q}=\frac{1x(\frac{1}{p})}{1+\frac{q^2}{p^2}}=\frac{p}{p^2+q^2}$$

شرط أن يكون التحويل قانونيا هو أن: $J=\frac{\partial(P,Q)}{\partial(p,q)}$ وهذا يعطى من:

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q}\\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}p & q\\ \frac{-q}{p^2+q^2} & \frac{p}{p^2+q^2}\end{vmatrix}=\frac{p^2}{p^2+q^2}+\frac{q^2}{p^2+q^2}$$

$$=\frac{p^2+q^2}{p^2+q^2}=1$$

إذن التحويل قانونيا.

مثال ٨:

أثبت أن التحويل التالي:

$Q=\ell n(\frac{1}{q}\sin p)$, $P=q\cot anp$ يكون قانونيا.

الحل

$$\frac{\partial P}{\partial p}=-q\cos ec^2 p \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial q}=\cot anp$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p}=\frac{\frac{1}{q}\cos p}{\frac{1}{q}\sin p}=\cot anp$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q}=\frac{\sin p(-\frac{1}{q^2})}{\frac{1}{q}\sin p}=-\frac{1}{q}$$

شرط أن يكون التحويل قانونيا هو أن يكون الجاكوبيان $1 = J=\frac{\partial(P,Q)}{\partial(p,Q)}$ وهذا يعطى:

$$J=\frac{\partial(P,Q)}{\partial(p,Q)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q}\\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-q\operatorname{cosec}^2 p & \cot anp\\ \cot anp & -\frac{1}{q}\end{vmatrix}$$

$$=\operatorname{cosec}^2 p-\cot an^2 p=1$$

إذا التحويل هو تحويلا قانونيا.

مثال٩:

أثبت أن علاقة التحويل التالية: $P=\sqrt{q}\sin^2 p, Q=\sqrt{q}\cos^2 p$ قانونية.

الحل

$$\frac{\partial P}{\partial p}=2\sqrt{q}\cos^2 p \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial q}=\frac{1}{2\sqrt{q}}\sin^2 p$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p}=-2\sqrt{q}\sin^2 p \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial q}=\frac{1}{2\sqrt{q}}\cos^2 p$$

$$J=\begin{vmatrix} 2\sqrt{q}\cos^2 p & \frac{1}{2\sqrt{q}}\sin^2 p \\ -2\sqrt{q}\sin^2 p & \frac{1}{2\sqrt{q}}\cos^2 p \end{vmatrix}=\cos^2 2p+\sin^2 p=1$$

مثال ١٠:

أثبت أن علاقة التحويل التالية قانونية:

$$P=\sqrt{2q}e^{-t}\sin p, Q=\sqrt{2q}e^{t}\cos p$$

الحل

$$\frac{\partial P}{\partial p}=\sqrt{2q}e^{-t}\cos p \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial q}=\frac{1}{\sqrt{2q}}e^{-t}\sin p$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p}=-\sqrt{2q}e^{t}\sin p, \frac{\partial Q}{\partial q}=\frac{e^{t}}{\sqrt{2q}}\cos p$$

$$J=\begin{vmatrix} \sqrt{2q}e^{-t}\cos p & \frac{1}{\sqrt{2q}}e^{-t}\sin p \\ -\sqrt{2q}e^{t}\sin p & \frac{e^{t}}{\sqrt{2q}}\cos p \end{vmatrix}$$

$$=\cos^2 p+\sin^2 p=1$$

مثال ١١:

أثبت أن التحويل التالي قانونيا:

$$P=(p^2+\omega^2 q^2)/2\omega \quad , \quad Q=\cot an^{-1}(p)/\omega q$$

الحل

$$\frac{\partial P}{\partial p}=\frac{p}{\omega},\frac{\partial p}{\partial q}=\omega q$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p}=-\frac{\omega q}{\omega^2 q^2+p^2} \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial q}=\frac{\omega p}{\omega^2 q^2+p^2}$$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{p}{\omega} & \omega q\\ \frac{\omega q}{\omega^2q^2+p^2} & \frac{\omega p}{\omega^2q^2+p^2}\end{vmatrix}=\frac{p^2+\omega^2 q}{\omega^2q^2+p^2}=1$$

مثال ١٢:

إذا كانت معادلات التحويل هي:

$$Q=\ell n\left(1+\sqrt{q}\cos p\right)\quad,\quad P=2\left(1+\sqrt{q}\cos p\right)\sqrt{q}\sin p$$

فأثبت أن التحويل يكون قانونيا، وأن الدالة المولدة للتحويل هي:

$$G_3=-(e^Q-1)^2\tan p$$

الحـل

يمكن كتابة معادلتي التحويل على الصورة التالية:

$$Q=\ell n\left(1+\sqrt{q}\cos p\right)\quad,\quad P=2\sqrt{q}\sin p+q\sin^2 p$$

ويمكن إثبات أن هذا التحويل قانونيا وإذا كان الجاكوبيان يساوى الوحدة أي أن:

$$J=\frac{\partial(P,Q)}{\partial(p,q)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q}\\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q}\end{vmatrix}=1$$

لذا نحسب الآن عناصر المحدد كالتالي:

$$\frac{\partial P}{\partial p}=2\sqrt{q}\cos p+2q\cos 2p$$

$$\frac{\partial P}{\partial q}=\frac{\sin p}{\sqrt{q}}+\sin^2 p\quad,\quad \frac{\partial Q}{\partial p}=\frac{-\sqrt{q}\sin p}{1+\sqrt{q}\cos p}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{q}}\cos p}{1+\sqrt{q}\cos p}$$

$$J=\begin{vmatrix} 2\sqrt{q}\cos p+2q\cos^2 p & \dfrac{\sin p}{\sqrt{q}}+\sin^2 p \\ \dfrac{-\sqrt{q}\sin p}{1+\sqrt{q}\cos p} & \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{q}}\cos p}{1+\sqrt{q}\cos p} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\cos^2 p+\sqrt{q}\cos p\cos^2 p+\sin^2 p+\sqrt{q}\sin p\sin^2 p}{1+\sqrt{q}\cos p}$$

$$=\frac{\cos^2 p+\sin^2 p+\sqrt{q}\left[\cos p(1-2\sin^2 p)\right]}{1+\sqrt{q}\cos p}$$

$$+\frac{+\sqrt{q}(\sin p(2\sin p\cos p))}{1+\sqrt{q}\cos p}$$

$$=\frac{1+\sqrt{q}\cos p-2\sqrt{q}\sin^2 p\cos p+2\sqrt{q}\sin^2 p\cos p}{1+\sqrt{q}\cos p}=1$$

ولإيجاد الدالة المولدة نتبع الآتي: من معادلة التحويل الأولى:

$$e^Q=1+\sqrt{q}\cos p\Rightarrow e^Q-1=\sqrt{q}\cos p$$

$$\therefore q^{\frac{1}{2}}=(e^Q-1)\cos p \qquad (1)$$

بالتعويض من (١) في معادلة التحويل الثانية نجد أن:

$$P=2\frac{(e^Q-1)}{\cos p}\sin p+\frac{(e^Q-1)}{\cos^2 p}2\sin p\cos p$$

$$P=2(e^Q-1)(e^Q)\tan p \qquad (2)$$

وهذا الشكل لكمية الحركة المعممة في الإحداثيات الجديدة يقترح علينا دالة مولدة من النوع الثالث $G_3(p,Q)$ وفى هذه الحالة نجد:

$$P=-\frac{\partial G_3}{\partial Q}=2e^Q(e^Q-1)\tan p$$

بالتكامل جزئيا بالنسبة إلى Q نجد أن:

$$G_3 = -2\int e^Q(e^Q-1)\tan p\,dQ = (e^Q-1)^2\tan p + f(p)$$

و$f(p)$ هي دالة اختيارية يمكن اختيارها صفرا وتكون:

$$G_3 = -(e^Q-1)^2\tan p$$

مثال ١٣:

إذا كان $Q=\tan^{-1}(p/q)$ ، $P=\frac{1}{2}(q^2+p^2)$ فأوجد التحويل العكسي. أثبت أنه تحويل قانوني وذلك بأكثر من طريقة وأوجد أيضاً الصور المختلفة للدالة المولدة.

الحل

$$\because\ q = p\tan Q$$

$$\therefore\ 2P = p^2(1+\tan^2 Q) = p^2\sec^2 Q$$

$$\therefore p^2 = 2P\cos^2 Q \quad\Rightarrow\quad p=\sqrt{2P}\cos Q$$

∴ التحويل العكسي هو :

$$\begin{cases} q=\sqrt{2P}\cos Q\,.\tan Q=\sqrt{2P}\sin Q\ , \\ p=\sqrt{2P}\cos Q \end{cases}$$

١- سوف نثبت الآن أن $p\,dq - P\,dQ$ تفاضل تام لكي يكون التحويل قانوني.

$$dQ=\frac{1}{(1+q^2/p^2)}\,\frac{p\,dq-q\,dp}{p^2}=\frac{p\,dq-q\,dp}{q^2+p^2}$$

$$p\,dq-P\,dQ=p\,dq-\frac{1}{2}(q^2+p^2)\,.\frac{p\,dq-q\,dp}{q^2+p^2}$$

$$=\frac{1}{2}(p\,dq+q\,dp)=d(pq/2)$$

أي تفاضل تام. وحيث أن الشرط السابق مستنتج من المعادلات التي بمقتضاها تولد G_1 التحويل القانوني. إذن

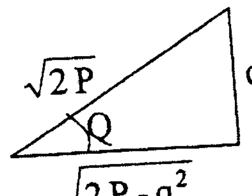
$$G_1=\frac{pq}{2}$$

ولكي تكون G_1 هي الدالة الصحيحة يجب أن تكون دالة في q, Q أي $G_1 \equiv G_1(q, Q)$ وبالتعويض عن p من رأس المسألة نجد أن :

$$G_1 = \frac{q^2}{2\tan Q}$$

٢. حيث أن:

$$G_2 = G_1 + PQ = \frac{q^2}{2\tan Q} + PQ$$



وللحصول على G_2 الصحيحة يجب أن تكون $G_2 \equiv G_2(q, P)$. نعوض عن Q حيث: $Q = \sin^{-1}\frac{q}{\sqrt{2P}}$

$$\therefore\ G_2 = \frac{q\sqrt{2P - q^2}}{2} + P\sin^{-1}\frac{q}{\sqrt{2P}}$$

٣. لإيجاد G_3 :

$$G_3 = G_1 - pq = \frac{pq}{2} - pq = -\frac{1}{2}pq$$

وحيث أن $G_3 \equiv G_3(p, Q)$ إذن نحذف q أي نوجدها بدلالة p, Q حيث أن q $= p\tan Q$

$$\therefore\ G_3 = -\frac{1}{2}p^2\tan Q$$

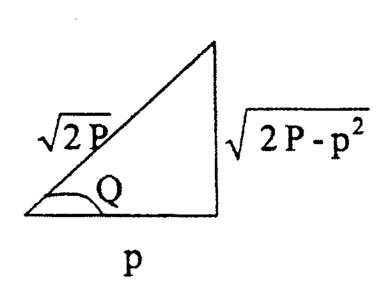
٤. لإيجاد دالة التحويل التي تعتمد على p, P والتي تسمى G_4 نعلم أن

$$G_4 = G_1 - pq + PQ = \frac{pq}{2} - pq + PQ = -\frac{1}{2}pq + PQ$$

وبحذف q، Q وإيجادهم بدلالة P, p

$$q = p\tan Q = p.\frac{\sqrt{2P - p^2}}{p} - \sqrt{2P - p^2}$$

$$\therefore\ G_4 = -\frac{1}{2} p \sqrt{2P - p^2} + P \tan^{-1} \frac{\sqrt{2P - p^2}}{p}$$



يترك للطالب إثبات قانونية التحويل

من $\dfrac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = 1$

مثال ١٤:

أوجد التحويل القانوني الذي دالته المولدة هي: $G = -\dfrac{p^2}{2} \tan Q$

وأوجد H إذا كانت: (i) $H = m g q$ (ii) $H = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{m\omega^2}{2} q^2$

الحل

G تعتمد على p, Q وعلى ذلك فإن $G \equiv G_3$

$$q = -\frac{\partial G_3}{\partial p} \ ; \ P = -\frac{\partial G_3}{\partial Q}$$

$$\therefore\ q = p \tan Q \ ; P = \frac{p^2}{2} \sec^2 Q = \frac{p^2}{2}\left(1 + \tan^2 Q\right)$$

$$\therefore\ Q = \tan^{-1}\left(\frac{q}{p}\right) \ ; \ P = \frac{p^2}{2}\left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right) = \frac{1}{2}\left(q^2 + p^2\right)$$

وهو نفس التحويل القانوني في المثال السابق. أما التحويل العكسي فهو

$$q = \sqrt{2P} \sin Q \quad , \quad p = \sqrt{2P} \cos Q$$

وحيث أن G لا تعتمد على t صراحة إذن H = H وإذا كانت

(i) $H = m g q$

$\therefore$ $\sqrt{2P} \sin Q$

(ii) $H = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{m\omega^2}{2} q^2$

$$\therefore \; H = \frac{P}{m}\cos^2 Q + m\,\omega^2 P \sin^2 Q$$

مثال ١٥:

أثبت أن التحويل الآتي هو تحويل قانوني

$$Q = \ln\left(1+\sqrt{q}\cos p\right) \quad ; \; P = 2\left(1+\sqrt{q}\cos p\right)\sqrt{q}\sin p$$

ثم أوجد G_3

الحـل

نثبت أن $p\,d\,q - P\,d\,Q$ هو تفاضل تام لكي يكون التحويل قانوني

$$d\,Q = \frac{\partial Q}{\partial q}d\,q + \frac{\partial Q}{\partial p}d\,p = \frac{\frac{1}{2\sqrt{q}}\cos p\,d\,q - \sqrt{q}\sin p\,d\,p}{1+\sqrt{q}\cos p}$$

$$P\,d\,Q = \sin p\cos p\,d\,q - 2\,q\sin^2 p\,d\,p$$

$$\therefore \; p\,d\,q - P\,d\,Q = (p - \frac{1}{2}\sin 2\,p)\;d\,q + 2\,q\sin^2 p\,d\,p$$

$$\equiv$$

$$\frac{\partial R}{\partial p} = 1 - \cos 2\,p = 2\sin^2 p \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial q} = 2\sin^2 p$$

$$\therefore \; \frac{\partial R}{\partial p} = \frac{\partial N}{\partial q}$$

وعلى ذلك فإن $p\,d\,q - P\,d\,Q$ هو تفاضل تام أي أن التحويل قانوني.

لإيجاد $G_3 \equiv G_3(p, Q)$ نستخدم

$$q = -\frac{\partial G_3}{\partial p} \quad , \; P = -\frac{\partial G_3}{\partial Q}$$

ونوجد P, q كدوال في p، Q

$$q = (\frac{e^Q - 1}{\cos p})^2 \quad ,$$

$$P = 2\,e^Q(e^Q - 1)\;\tan p$$

$\sqrt{P^2 + 4\,e^{2Q}\left(e^Q - 1\right)^2}$

p P

$2\,e^Q\left(e^Q - 1\right)$

$$\therefore \frac{\partial G_3}{\partial p} = -\left(e^Q - 1\right)^2 \sec^2 p$$

$$\therefore G_3 = -(e^Q - 1)^2 \tan p + F(Q) \qquad (*)$$

كذلك

$$\frac{\partial G_3}{\partial Q} = -2\,(e^{2Q} - e^Q) \tan p$$

$$\therefore G_3 = -2\left(\tfrac{1}{2} e^{2Q} - e^Q\right) \tan p + C(p)$$

$$= -(e^Q - 1)^2 \tan p + \tan p + C(p) \qquad (*)'$$

حيث $F(Q)$ هي دالة في Q فقط، $C(p)$ هي دالة في p فقط.

بمقارنة '(*) ,(*) نجد أن :

$$C(p) = -\tan p \quad ; \qquad F(Q) = 0$$

$$\therefore G_3 = -(e^Q - 1)^2 \tan p$$

مثال ١٦:

اثبت قانونية التحويل في المثال السابق عن طريق إثبات أن $\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = 1$ أوجد أيضاً التحويل العكسي.

الحل

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\cos p}{2\sqrt{q}\left(1 + \sqrt{q}\cos p\right)}\ , \qquad (i)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{-\sqrt{q}\sin p}{1 + \sqrt{q}\cos p}\ , \qquad (ii)$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{\left(1 + 2\sqrt{q}\cos p\right)\sin p}{\sqrt{q}}\ , \qquad (iii)$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = 2\sqrt{q}\left(\cos p + \sqrt{q}\cos 2p\right) \qquad (iv)$$

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial q}\\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial p}\end{vmatrix}=\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}-\frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p}$$

وبالتعويض من (i)، (ii)، (iii) نجد أن : $\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)}=1$

لإيجاد التحويل العكسي : وجدنا أن :

$$q=\frac{(e^Q-1)^2}{\cos^2 p}, P=2\,e^Q(e^Q-1)\tan p \qquad (1)$$

$$\therefore Q=\frac{(e^Q-1)^2[P^2+4\,e^{2Q}(e^Q-1)^2]}{4\,e^{2Q}(e^Q-1)^2}=\frac{1}{4}P^2e^{-2Q}+(e^Q-1)^2$$

كذلك $\tan p=\frac{P}{2\,e^Q(e^Q-1)} \quad \Rightarrow \quad p=\tan^{-1}\frac{P}{2\,e^Q(e^Q-1)}$

مثال ١٧:

أوجد قيم α، β حتى يكون التحويل الآتي قانونياً

$$Q=q^\alpha\cos\beta p \quad , \; P=q^\alpha\sin\beta p$$

ومن ثم أوجد الدالة المولدة G_3 .

الحل

لكي يكون التحويل قانونياً يجب أن يكون

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)}=\frac{\partial Q}{\partial q}\cdot\frac{\partial P}{\partial p}-\frac{\partial Q}{\partial p}\cdot\frac{\partial P}{\partial q}=1$$

نفرض أن التحويل قانوني:

$$\therefore (\alpha\,q^{\alpha-1}\cos\beta\,p)(q^\alpha\beta\cos\beta\,p)+(q^\alpha\beta\sin\beta\,p)(\alpha\,q^{\alpha-1}\sin\beta\,p)=1$$

$$\therefore \beta\alpha\,q^{2\alpha-1}=1 \qquad \therefore 2\alpha-1=0$$

ومنها $\alpha=\frac{1}{2}$ ، $\beta=2$ ويكون التحويل هو

$$Q=\sqrt{q}\cos 2p \quad , P=\sqrt{q}\sin 2p$$

لإيجاد G_3 نعلم أن

$$q=-\frac{\partial G_3}{\partial p} \quad , \quad P=-\frac{\partial G_3}{\partial Q}$$

$$\therefore \quad q=Q^2\sec^2 2p=-\frac{\partial G_3}{\partial p}$$

بالتكامل بالنسبة إلى p

$$\therefore \; G_3=-\frac{1}{2}Q^2\tan 2p+f(Q) \qquad (1)$$

كذلك

$$P=-\frac{\partial G_3}{\partial Q}=\sqrt{q}\sin 2p=Q\tan 2p$$

بالتكامل بالنسبة إلى Q

$$\therefore \; G_3=-\frac{1}{2}Q^2\tan 2p+C(p) \qquad (2)$$

بمقارنة (1)، (2) نجد أن :

$$f(Q)=0\,, \quad C(p)=0 \quad \Rightarrow \quad G_3=-\frac{1}{2}Q^2\tan 2p$$

مثال ١٨:

أوجد التحويل القانوني الذي دالته المولدة هي

$$G=\frac{1}{2}[-Q\sqrt{q-Q^2}+q\cos^{-1}\frac{Q}{\sqrt{q}}]$$

الحـل

واضح أن G من النوع الأول G_1 التي تعتمد على q, Q

$$\therefore\ p=\frac{\partial G_1}{\partial q} \quad , \qquad P=-\frac{\partial G_1}{\partial Q}$$

$$\therefore\ p=\frac{1}{2}[-\frac{Q}{2\sqrt{q-Q^2}}+\cos^{-1}\frac{Q}{\sqrt{q}}-\frac{q}{\sqrt{1-\frac{Q^2}{q}}}(-\frac{Q}{2q^{3/2}})]$$

$$=\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{Q}{\sqrt{q}} \qquad (1)$$

$$P=-\frac{1}{2}[-Q\frac{-2Q}{2\sqrt{q-Q^2}}-\sqrt{q-Q^2}-q\frac{1}{\sqrt{1-\frac{Q^2}{q}}}\times\frac{1}{\sqrt{q}}]$$

$$=\sqrt{q-Q^2} \qquad (2)$$

من (1)، (2) نجد أن :

$$Q=\sqrt{q}\cos 2p \quad , \qquad P=\sqrt{q}\sin 2p$$

وهو نفس التحويل القانوني في المثال السابق.

مثال ١٩:

اثبت أن التحويل الآتي هو تحويل قانوني: $Q=\text{lin}[(\sin p)/q]\ , P=q\cot p$

وأوجد الدالة المولدة G_4

الحـل

نثبت أن $p\,dq-P\,dQ$ تفاضل تام

$$dQ=\frac{1}{(\sin p)/q}\,\frac{q\cos p\,dp-\sin p\,dq}{q^2}$$

$$p\,dq-P\,dQ=p\,dq-(q\cot p)\,.\,\frac{q\cos p\,dp-\sin p\,dq}{q\sin p}$$

$$=(p+\cot p)\,dq-q\cot^2 p\,dp$$

$$=R\,dq+N\,dp$$

$$\frac{\partial R}{\partial p}=1-\text{cosec}^2 p=-\cot^2 p \ , \quad \frac{\partial N}{\partial q}=-\cot^2 p$$

وعلى ذلك فإن $p\,d\,q - P\,d\,Q$ تفاضل تام أي أن التحويل قانوني.

وكان يمكن إثبات أن $\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = 1$ وسوف يترك ذلك للطالب.

كذلك $G_4 \equiv G_4(p, P)$

$$\therefore\ q = -\frac{\partial G_4}{\partial p}\ , \qquad Q = \frac{\partial G_4}{\partial P}$$

وحيث أن $P = q \cot p$ إذن $q = P \tan p$

$$\therefore -\frac{\partial G_4}{\partial p} = P \tan p$$

وبالتكامل بالنسبة إلى p

$$\therefore\ G_4 = P \ln \cos p + f(P) \qquad (1)$$

كذلك حيث أن $Q = \ln \frac{\sin p}{q}$ إذن

$$Q = \ln \frac{\sin p}{P \tan p} = \ln \frac{\cos p}{P} = \ln \cos p - \ln P$$

$$\therefore\ \frac{\partial G_4}{\partial P} = \ln \cos p - \ln P$$

وبالتكامل بالنسبة إلى P

$$\therefore\ G_4 = P \ln \cos p - P \ln P + P + C(p) \qquad (2)$$

وبمقارنة (1)، (2) نجد أن :

$$f(P) = P(1 - \ln P)\ , \qquad C(p) = 0$$

$$\therefore G_4 = P \ln \cos p + P\,(1 - \ln P)$$

مثال ٢٠:

أوجد التحويل القانوني الذي دالته المولدة هي: $G = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot Q$ حيث m، ω ثوابت. ومن ثم استخدم هذا التحويل لحل مسألة التذبذب التوافقي الخطي الذي كتلته m وثابت القوة المؤثرة عليه $m\omega^2$ بفرض أنه بدأ الحركة من السكون من نقطة على بعد a من مركز الذبذبة.

الحـل

واضح أن $G \equiv G_1(q, Q)$

$$\therefore \quad p = \frac{\partial G_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q \quad ; \quad P = -\frac{\partial G_1}{\partial Q} = \frac{m\omega}{2} q^2 \operatorname{cosec}^2 Q$$

$$P = \frac{m\omega}{2} q^2 \left(\frac{p^2 + m^2\omega^2 q^2}{m^2\omega^2 q^2}\right) = \frac{p^2 + m^2\omega^2 q^2}{2m\omega}$$

وعلى ذلك فإن التحويل القانوني هو

$$Q = \cot^{-1}\frac{p}{m\omega q} \, , \qquad P = \frac{p^2 + m^2\omega^2 q^2}{2m\omega}$$

أما التحويل العكسي فهو

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \, , \qquad p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q$$

نحل الآن مسألة المتذبذب التوافقي الخطي ونضعها رياضياً في الإحداثيات القديمة q, p فيكون:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 = \text{const.} = E$$

ثم نضع المسألة رياضياً في الإحداثيات الجديدة Q, P باستخدام التحويل القانوني العكسي مع ملاحظة أن $H = H$ حيث أن G لا تحتوي على الزمن t صراحة

$$H=\frac{1}{2m}\left[\sqrt{2m\omega P}\cos Q\right]^2+\frac{m\omega^2}{2}\left[\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q\right]^2$$
$$=\omega P=E$$

واضح أن دالة هاملتون في الإحداثيات الجديدة بسيطة ولا تحتوي على الإحداثي المعمم Q أي أنه إحداثي مهمل لذلك فإن كمية الحركة المعممة في الإحداثيات الجديدة P تظل ثابتة أثناء الحركة: $P=\frac{E}{\omega}=\text{const.}$

بكتابة معادلات هاملتون في الإحداثيات الجديدة

$$\dot{Q}=\frac{\partial H}{\partial P}\ ,\quad \dot{P}=-\frac{\partial H}{\partial Q}\ ,$$
$$\therefore\ \dot{Q}=\omega=\text{const.}\quad ;\ \dot{P}=0$$
$$\therefore\ Q=\omega t+\alpha\qquad ;\ P=\text{const.}=\frac{E}{\omega}$$

وحيث أن :

$$q=\sqrt{\frac{2p}{m\omega}}\sin Q\ ,\qquad \therefore\ q=\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin(\omega t+\alpha)$$

حيث α مقدار ثابت يتعين من الشروط الابتدائية وهي:

عند $t=0$ فإن $q=a$ ، $p=0$ ، $E=\frac{m\omega^2a^2}{2}$

$$\therefore\ a=a\sin\alpha\quad \text{or}\quad \alpha=\frac{\pi}{2}$$
$$\therefore\ q=a\sin(\omega t+\frac{\pi}{2})=a\cos\omega t$$

مثال ٢١:

اثبت أن التحويل $P=\sqrt{2qk}\sin p\ ,\ Q=\sqrt{2\frac{q}{k}}\cos p$

الحـل

نثبت أن $p\,d\,q - P\,d\,Q$ هو تفاضل تام

$$d\,Q = -\sqrt{2\frac{q}{k}}\sin p\,d\,p + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{k}}\,q^{-\frac{1}{2}}\cos p\,d\,q$$

$$P\,d\,Q = \sqrt{2\,q\,k}\sin p\,-[-\sqrt{2\frac{q}{k}}\sin p\,d\,p + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{k}}\,q^{-\frac{1}{2}}\cos p\,d\,q]$$

$$= \sin p\cos p\,d\,q - 2\,q\sin^2 p\,d\,p$$

$$p\,d\,q - P\,d\,Q = (p - \sin p\cos p)\,d\,q + 2\,q\sin^2 p\,d\,p$$

$$= X\,d\,q + Y\,d\,p$$

$$\frac{\partial X}{\partial p} = 1 - \cos 2\,p = 2\sin^2 p\ ,\quad \frac{\partial Y}{\partial q} = 2\sin^2 p$$

$$\therefore\ \frac{\partial X}{\partial p} = \frac{\partial Y}{\partial q}$$

$\therefore$ $(p\,d\,q - P\,d\,Q)$ تفاضل تام وعلى ذلك فإن التحويل يكون قانوني.

ثانيا: معادلة هاملتون-جاكوبي: Hamilton-Jacobi Equation

من النتائج المفيدة للتحويلات القانونية هي إيجاد حلول لبعض المسائل الميكانيكية وذلك باعتبار أنه إذا أمكن التحويل إلى إحداثيات جديدة مستترة (دورية أو مهملة) تكون معادلات الحركة لها قابلة للحل بسهولة.

ومن الاعتبارات المفيدة أنه إذا أمكن إيجاد تحويل قانوني (أو فيصلى) بحيث يكون فيه دالة هاملتون الجديدة $\overline{H}$ مساوية للصفر. فإننا نرى من دالة التحويل $G_2(q,p,t)$ بالتحديد سوف تعطينا كل من كميات الحركة القديمة والإحداثيات الجديدة على الصورة:

$$p_s = \frac{\partial G_2}{\partial q_s}\ ,\quad Q_s = \frac{\partial G_2}{\partial P_s}\quad \overline{H} - H = \frac{\partial G_2}{\partial t} \qquad (1)$$

أي أن باستخدام التحويل القانوني السابق نستطيع إيجاد المتغيرات الجديدة P, Q ثوابت وذلك عندما $\overline{H}=0$ وبالتالي نستطيع تحديد حركة المجموعة. والخطوات تتوقف على إيجاد الدالة المولدة للتحويل الصحيحة.

من المعادلة (١) نرى بعد وضع $\overline{H}=0$ أن الدالة المولدة للتحويل تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$\frac{\partial G_2}{\partial t}+H(q_\alpha,p_\alpha,t)=0$$

وحيث أننا هنا نتناول حالة بعينها ألا وهي عندما $\overline{H}=0$ ، $P_\alpha=\text{const.}=\beta_\alpha$ فإننا سوف نرمز للدالة G_2 التي لها هذه الخاصية بالرمز $S(q_\alpha,P_\alpha,t)$ أو $S(q_\alpha,\text{const.},t)$ حيث تكون

$$P_\alpha=\frac{\partial S}{\partial q_\alpha} \qquad , \qquad Q_\alpha=\frac{\partial S}{\partial \beta_\alpha}$$

حيث $\overline{H}=0$

$$\frac{\partial S(q_\alpha,p_\alpha,t)}{\partial t}+H\left(q_1,q_2,\dots\dots,q_n,\frac{\partial S}{\partial q_1},\dots\dots\frac{\partial S}{\partial q_n},t\right)=0 \qquad (4)$$

تسمى هذه المعادلة بمعادلة هاملتون جاكوبي وهي معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولى في المتغيرات $(q_1,q_2,\dots,q_n,t)$ وعددهم $(n+1)$ وحلها يعطينا الدالة $S(q_\alpha,P_\alpha,t)$ والتي تسمى بدالة هاملتون الرئيسية Hamilton's principle function وهي الدالة التي تولد هذا التحويل القانوني الفريد الذي فيه $\overline{H}(Q_\alpha,P_\alpha,t)=0$ أي الذي يحول الإحداثيات (q_α,p_α) إلى الإحداثيات القانونية الجديدة الثابتة (Q_α,P_α). (حيث β_α ، q_α مقدار ثابت) والتي تتلاشى ومن العلاقة $Q_\alpha=\frac{\partial S}{\beta_\alpha}=\gamma_\alpha$ نحصل على

المواضع القديمة ومن $p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}$ نحصل على p_α ومن ثم تكون المجموعة الديناميكية قد تحددت تحديداً تاماً.

٥-٥ كيف تؤدي معادلة هاملتون ـ جاكوبي إلى حل المسألة الديناميكية :

حيث أن :

$$P_\alpha = \text{const.} = \beta_\alpha \quad \text{say} \tag{5}$$

نجد دالة التحويل S تأخذ الصورة

$$S \equiv S(q_1, q_2, ..., q_n, \beta_1, ..., \beta_n, t) \tag{6}$$

وكما ذكرنا أنه بحل معادلة هاملتون ـ جاكوبي (4) يمكن معرفة S ومنها نحصل على كميات الحركة المعممة القديمة p_α من

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} \quad , \quad \alpha = 1, 2, ..., n$$

ومن العلاقة

$$Q_\alpha = \frac{\partial S}{\partial P_\alpha} = \frac{\partial S}{\partial \beta_\alpha} \tag{7}$$

نحصل على الإحداثيات المعممة القديمة q_α كدوال في $\beta_\alpha, \gamma_\alpha, t$ وبذلك تكون حركة المجموعة الديناميكية قد تحددت تماماً.

٦-٥ حالة خاصة عندما تكون دالة هاملتون القديمة لا تحتوي على الزمن t صراحة

عندما تكون $H \equiv H(p_\alpha, q_\alpha)$ أي لا تعتمد على الزمن t صراحة أي في حالة المجموعات المحافظة فإن $H = E = \text{const.}$ حيث E هي الطاقة الكلية للمجموعة تصبح معادلة هاملتون جاكوبي على الصورة :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E \tag{8}$$

وبالتكامل بالنسبة للزمن t

$$\therefore \; S(q_\alpha, \beta_\alpha, t) = -E\,t + W(q_\alpha, \beta_\alpha) \tag{9}$$

الدالة $W \equiv W(q_\alpha, \beta_\alpha)$ تسمى بدالة هاملتون المميزة Hamilton's characteristic وهي لا تعتمد على الزمن t صراحة وهي دالة مولدة من النوع الثاني لتحويل قانوني غير الذي تولده الدالة S. معادلة هاملتون جاكوبي التي تحققها الدالة W هي

$$H(\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}, q_\alpha) = E \qquad (10)$$

وبحل هذه المعادلة نستطيع إيجاد الدالة $W(q_\alpha, \beta_\alpha)$ وبمقتضى المعادلات

$$p_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} \; ; \; Q_\alpha \equiv \gamma_\alpha = \frac{\partial S}{\partial \beta_\alpha} = \frac{\partial (W - E\,t)}{\partial \beta_\alpha} \qquad (11)$$

نستطيع حل المعادلة الديناميكية بنفس الأسلوب السابق

يلاحظ أن E يعتبر أحد الثوابت التي تحتويها الدالة S (معادلة (9)) وسوف نختار هذا الثابت مساوياً للثابت β_1 أي أن :

$$E = \beta_1$$

وتصبح المعادلة (9) على الصورة :

$$S = W - \beta_1\, t \qquad (9)'$$

وتصبح (10) على الصورة

$$H(\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}, q_\alpha) = \beta_1 \qquad (10)'$$

هذه المعادلة تسمى معادلة هاملتون- جاكوبي.

❖ **ملاحظات :**

واضح أن المعادلة $\frac{\partial S}{\partial t}+H(q_\alpha,\frac{\partial S}{\partial q_\alpha},t)=0$ هي معادلة تفاضلية جزئية في الدالة الغير معلومة S وهي دالة في المتغيرات (q,t) فقط. وفي الحقيقة أن هذه الدالة تحتوى على عدد n من الثوابت $\beta_1,\beta_2,......,\beta_n$ هم كميات الحركة الجديدة $P_1,P_2,......,P_n$.
وحيث أن دالة هاملتون الجديدة $\overline{H}$ تساوى الصفر وكذلك فإن الإحداثيات الجديدة $Q_1,Q_2,......,Q_n$ تكون ثوابت ولتكن $\gamma_1,\gamma_2,......,\gamma_n$ وبذلك يكون لدينا:

$$P_\alpha=\beta_\alpha \quad , \quad Q_\alpha=\frac{\partial S}{\partial \beta_\alpha}=\gamma_\alpha \qquad (3)$$

ولإيجاد دالة التحويل الجديدة القانونية G فإنه يمكن استخدام طريقة فصل المتغيرات ولنفرض الصورة التالية للدالة G.

$$G=G_1(q_1)+G_2(q_2)+\ldots+G^*(t)$$

هذا وإذا كان $\frac{\partial H}{\partial t}=0$ فإن $H=E$ ونجد أن: $G^*(t)=-E\,t$

وتصبح معادلة هاملتون- جاكوبي على الصورة: $H(q,\frac{\partial G}{\partial q})=E$

وتكون دالة هاملتون- جاكوبي في هذه الحالة هي:

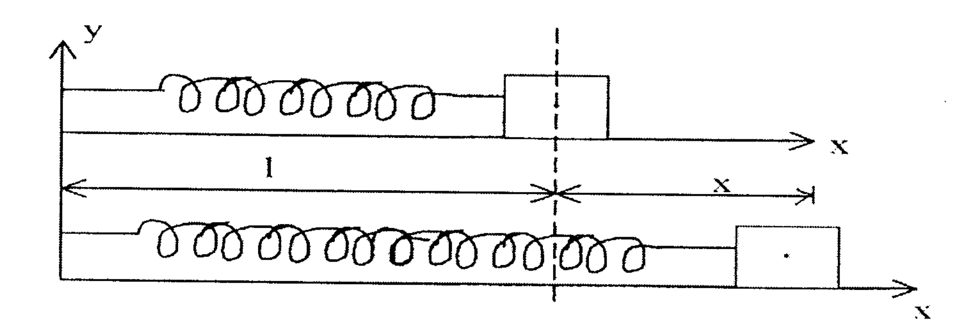
$$G=G_1(q_1)+G_2(q_2)+\ldots+G_n(q_n)$$

وسوف نعتبر فيما يلي المثالين التاليين:

مثال١:
طبق معادلة هاملتون- جاكوبي على حركة المهتز التوافقي البسيط ذو الكتلة m وثابت المرونة k وأثبت أن إحداثي الموضع q للمهتز التوافقي يعطى بالعلاقة: $q=\sqrt{\frac{2\alpha}{k}}\sin\left[\sqrt{\frac{k}{m}}(t+\beta)\right]$ حيث β ثابت، α هي الطاقة الكلية ، t هو الزمن.

الحـل

شكل (٦- ١)



طاقة الموضع و طاقة الحركة للمتذبذب هما:

$$V = -\frac{1}{2}kq^2 \quad , \quad T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 \qquad (1)$$

دالة لاجرانج تصبح:

$$L = T - V = L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 \qquad (2)$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \qquad (3)$$

دالة هاملتون:

$$H = p\dot{q} - L = m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 \qquad (4)$$

$$H = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = H(q_1, p) \qquad (5)$$

معادلة هاملتون-جاكوبي تصبح:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + H(q, \frac{\partial G}{\partial q}) = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\frac{\partial G}{\partial q})^2 + \frac{1}{2}kq^2 = 0$$

نفرض الآن الصورة التالية لدالة التحويل:

$$G(q,t) = G_1(q) + G_2(t)$$

$$\frac{1}{2m}(\frac{\partial G_1}{\partial q})^2 + \frac{1}{2}kq^2 = -\frac{dG_2}{dt} = \alpha$$

ومن الواضح أننا اعتبرنا طرفي المعادلة السابقة تساوى مقدارا ثابتا α حيث أن كل طرف لا يحتوى على المتغير في الطرف الآخر ومن الشق الأخير للمعادلة نجد أن:

$$G_2(t) = -\alpha t$$

وينتج إذن:

$$\left(\frac{dG_1}{dq}\right)^2 = 2m\alpha - mkq^2$$

$$dG_1 = \pm\sqrt{2m\alpha - mkq^2}\,dq$$

$$G_1 = \pm\int\sqrt{2m\alpha - mkq^2}\,dq$$

$$G = +\int\sqrt{2m(\alpha - \frac{1}{2}kq^2)}\,dq - \alpha t$$

حيث أننا ذكرنا أننا نبحث عن G بحيث يكون $K = 0$ في هذه الحالة تكون $P = \alpha$ أي أنها تمثل إحداثيات مستترة. وباعتبار α هو إحداثي كمية الحركة المعممة الجديدة أي أن: $P = \alpha$

فيكون Q هو إحداثي الموضع المعمم الجديد حيث :

$$Q=\frac{\partial G}{\partial P}=\frac{\partial G}{\partial \alpha}$$

بالتفاضل بالنسبة إلى α نجد أن:

$$\therefore Q=\pm\sqrt{\frac{2m}{4}}\int\frac{dq}{\sqrt{\alpha-\frac{1}{2}kq^2}}-t=\text{ثابت}=\beta$$

$$\pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dq}{\sqrt{\alpha-\frac{1}{2}kq}}=t+\beta$$

$$\pm\sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{\frac{2}{k}}\sin^{-1}\sqrt{\frac{k}{2\alpha}}q=t+\beta$$

$$q=\pm\sqrt{\frac{2\alpha}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t+\beta)-\right)$$

$$p=\frac{\partial G}{\partial q}=\pm\sqrt{2m\alpha-mkq^2}=\pm\sqrt{2m\alpha}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t+\beta)\right)$$

مثال٢: (مسألة كبلر لجسيم موجود في مجال قوة مركزية).
أكتب معادلة هاملتون- جاكوبي لحركة لنقطة مادية تتحرك تحت تأثير قوة مركزية بدلالة الإحداثيات القطبية r,θ لها دالة الجهد $V(r)$.

الحل

من الواضح أننا نستخدم في هذه المسألة الإحداثيات القطبية r,θ حيث تكون طاقة الحركة على الصورة:

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$$

ودالة لاجرانج تصبح:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

نحسب الآن كمية الحركة ثم دالة هاملتون كالتالي:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad , \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

$$H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - L$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{r}^2\dot{\theta}^2) + V(r)$$

$$= \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2) + V(r) \qquad (1)$$

$$\therefore H = H(r, \theta, p_r, p_\theta)$$

إذن معادلة هاملتون- جاكوبي تصبح:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + H(r, \theta, \frac{\partial G}{\partial r}, \frac{\partial G}{\partial \theta}) = 0$$

والتي تصبح:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left\{\frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r^2}(\frac{\partial G}{\partial \theta})^2\right\} + V(r) = 0 \qquad (2)$$

وبفرض أن:

$$G = s_1(r) + s_2(\theta) + s_3(t) \qquad (3)$$

إذن المعادلة (٢) تصبح:

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{ds_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{ds_2}{d\theta}\right)^2\right\} + V(r) = -\frac{ds_3}{dt}$$

وبوضع كلا من الطرفين يساوى β_3 أي أن:

$$\frac{ds_3}{dt}=\beta_3$$

$$\therefore \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{ds_2}{d\theta}\right)^2\right\}+V(r)=\beta_3 \qquad (5)$$

ومن تكامل (٤) ينتج أن:

$$s_3=-\beta_3 t$$

بضرب طرفي المعادلة (٥) في $2mr^2$ نحصل على:

$$\left(\frac{ds_2}{d\theta}\right)^2=r^2\left\{2m\beta_3-2mr^2V(r)-\left(\frac{ds_1}{dr}\right)^2\right\}$$

وحيث أن أحد طرفي المعادلة يعتمد على θ فقط بينما الطرف الآخر يعتمد على r فقط. إذن كل طرف يساوى مقدار ثابت ويكون:

$$\frac{ds_2}{d\theta}=\beta_2 \quad \Rightarrow \quad s_2=\beta_2\theta$$

وكذلك نجد أن:

$$r^2\left\{2m\beta_3-2mV(r)-\left(\frac{ds_1}{dr}\right)^2\right\}=\beta_2^2$$

فإذا كانت القوة مركزية وتتناسب عكسيا مع مربع المسافة أي أن:

$$V(r)=-\frac{k}{r}$$

$$\therefore 2m\beta_3+\frac{2mk}{r}-\left(\frac{ds_1}{dr}\right)^2=\frac{\beta_2^2}{r^2}$$

أو

$$\frac{ds_1}{dr}=\sqrt{2m\beta_3+\frac{2mk}{r}-\frac{\beta_2^2}{r^2}}$$

$$\therefore s_1=\int\sqrt{2m\beta_3+\frac{2mk}{r}-\frac{\beta_2^2}{r^2}}\,dr.$$

$$\therefore G=\int\sqrt{2m\beta_3+\frac{2mk}{r}-\frac{\beta_2^2}{r^2}}\,dr+\beta_2\theta-\beta_3 t.$$

وبتطابق β_3,β_2 مع كميتي الحركة الجديدتين P_θ,P_r على الترتيب نحصل على:

$$Q_r=\frac{\partial G}{\partial\beta_2}=\frac{\partial}{\partial\beta_2}\int\sqrt{2m\beta_3+\frac{2mk}{r}-\frac{\beta_2^2}{r^2}}\,dr+\theta=\gamma_1$$

$$Q_\theta=\frac{\partial G}{\partial\beta_3}=\frac{\partial}{\partial\beta_3}\int\sqrt{2m\beta_3+\frac{2mk}{r}-\frac{\beta_2^2}{r^2}}\,dr-t=\gamma_2$$

حيث Q_θ,Q_r تابعان مثل γ_2,γ_1.

$$\therefore\int\frac{\beta_2dr}{r^2\sqrt{2m\beta_2+\frac{2mk}{r^2}-\frac{\beta_2^2}{r^2}}}=\theta-\gamma_1\qquad(1)$$

$$\int\frac{mdr}{r^2\sqrt{2m\beta_3+\frac{2mk}{r}-\frac{\beta_2^2}{r^2}}}=t+\gamma_2\qquad(2)$$

بوضع $r=\frac{1}{u}$ ومنها $dr=-\frac{1}{u^2}$

$$\therefore\int\frac{u^2\beta_2(-\frac{du}{u^2})}{\sqrt{2m\beta_3+2mku-\beta_2^2u^2}}=-\int\frac{\beta_2du}{\sqrt{2m\beta_3+2mku-\beta_2^2u^2}}=\theta-\gamma_1$$

$$\therefore\int\frac{\beta_2du}{\sqrt{(2m\beta_3+\frac{m^2k^2}{\beta_2^2})-(\beta_2u-\frac{mk}{\beta_2})^2}}=\theta-\gamma_1$$

$$\therefore -\sin^{-1}\frac{\beta_2 u-\dfrac{mk}{\beta_2}}{\sqrt{2m\beta_3+\dfrac{m^2k^2}{\beta_2^2}}}=\theta-\gamma_1$$

$$\therefore -\frac{\beta_2^2 u-mk}{\sqrt{2m\beta_3\beta_2^2+m^2k^2}}=\sin(\theta-\gamma_1)=\cos(\theta+\frac{\pi}{2}-\gamma_1)$$

$$\therefore \frac{-\dfrac{\beta_2^2 u}{mk}+1}{\sqrt{\dfrac{2\beta_2^2\beta_3}{mk^2}+1}}=\cos(\theta+\frac{\pi}{2}-\gamma_1)$$

$$\therefore -\frac{\beta_2^2 u}{mk}=\left(\sqrt{\frac{2\beta_2^2\beta_3}{mk^2}+1}\right)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}-\gamma_1\right)-1$$

$$\therefore \frac{\beta_2^2 u}{mk}=\left(1-\sqrt{\frac{2\beta_2^2\beta_3}{mk^2}+1}\right)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}-\gamma_1\right)$$

$$\frac{1}{r}=u=\frac{mk}{\beta_2^2}\left\{1-\sqrt{\frac{2\beta_2^2\beta_3}{mk^2}+1}\right\}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}-\gamma_1\right)$$

$$\therefore r=\frac{\dfrac{\beta_2^2}{mk}}{\left(1-\sqrt{\dfrac{2\beta_2^2\beta_3}{mk^2}+1}\right)\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}-\gamma_1\right)}$$

الثابت β_3 هو عبارة عن الطاقة.

فإذا كانت $E = \beta_3 < 0$ يكون المدار قطعا ناقصا.
وإذا كانت $E = \beta_3 = 0$ يكون المدار قطعا مكافئا.
وإذا كان $E = \beta_3 > 0$ يكون المدار قطعا زائدا.

وبتكامل المعادلة (٢) فإنها تعطى المسار كدالة في الزمن t وبذلك أمكن استنتاج معادلة المسار عن طريق استخدام معادلة هاملتون- جاكوبي.

مثال٣:

أكتب معادلة هاملتون-جاكوبي لحركة لنقطة مادية تتحرك تحت تأثير قوة مركزية بدلالة الإحداثيات القطبية r, θ لها دالة الجهد $V = -\frac{k\cos\theta}{r}$.

الحـل

من الواضح أننا نستخدم في هذه المسألة الإحداثيات القطبية r, θ حيث تكون طاقة الحركة على الصورة:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

ودالة لاجرانج تصبح:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k\cos\theta}{r}$$

نحسب الآن كمية الحركة ثم دالة هاملتون كالتالي:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

$$H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - L$$
$$= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{r}^2\dot{\theta}^2) - \frac{k\cos\theta}{r^2}$$

$$= \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2) - \frac{k\cos\theta}{r^2}$$

$$\therefore H = H(r, \theta, p_r, p_\theta)$$

وتكون معادلة هاملتون- جاكوبي هي:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + H(r, \theta, \frac{\partial G}{\partial r}, \frac{\partial G}{\partial \theta}) = 0$$

والتي تصبح:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left\{(\frac{\partial G}{\partial r})^2 + \frac{1}{r^2}(\frac{\partial G}{\partial \theta})^2\right\} - \frac{k\cos\theta}{r2} = 0$$

وهذه هي معادلة هاملتون- جاكوبي المطلوبة.

$$G = s_1(r) + s_2(\theta) + f(t)$$

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{ds_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{ds_2}{d\theta}\right)^2\right\} - \frac{k\cos\theta}{r^2} = -\frac{df}{dt} = \beta$$

$$\Rightarrow f(t) = -\beta t$$

$$\frac{r^2}{2m}\left(\frac{ds_1}{dr}\right)^2 - \beta r^2 = k\cos\theta - \frac{1}{2m}\left(\frac{ds_1}{d\theta}\right)^2 = r$$

وبهذا يتم فصل المتغيرات ونحصل على المعادلتين:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{ds_1}{dr}\right)^2 = \beta + \frac{\gamma}{r^2}, \quad \frac{1}{2m}\left(\frac{ds_2}{d\theta}\right)^2 = k\cos\theta - \gamma$$

ومن ناحية المبدأ إذا تم حل المعادلتين فإننا نحصل على $s_1(r)$ ، $s_2(\theta)$ وبالتالي دالة التحويل :

$$G = s_1(r) + s_2(\theta) + f(t)$$

مثال٤:
سقط جسيم كتلته m من السكون من ارتفاع h من سطح الأرض تحت تأثير وزنه عين الحركة بطريقة هاملتون - جاكوبي

الحل

نأخذ الإحداثي المعمم q هي بعد الجسيم عند أي لحظة عن الأرض تكون سرعته المعممة هي $\dot{q}$ وهي سرعة الجسيم الحقيقية كمية الحركة المعممة p تساوي $m\dot{q}$ دالة هاملتون تعطى من:

$$H=\frac{1}{2}m\dot{q}^2+mgq=\frac{p^2}{2m}+mgq=E=\text{const.}$$

ولكن $p=\frac{\partial S}{\partial q}$ فتكون معادلة هاملتون - جاكوبي التي تحققها S هي

$$\frac{\partial S}{\partial t}-\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2+mgq=0 \quad \text{where} \quad \overline{H}=0$$

حيث $S=S(q,p,t)=S(q,E,t)$ وكذلك $P=\text{const.}=E$

ومعادلة هاملتون - جاكوبي التي تحققها الدالة W هي

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)+mgq=E \qquad \left(\overline{H}=E\right)$$

لأن $W=W(q,E)\ ,\ p=\frac{\partial W}{\partial q}$

أيضاً $W(q,E)-Et\ \ S(q,E,t)=$

$$p=\frac{\partial S}{\partial q}=\frac{\partial W}{\partial q}=\sqrt{2m}\,(E-mgq)^{1/2}$$

$$W=-\frac{2}{3g}\sqrt{\frac{2}{m}}\,(E-mgq)^{3/2}$$

$$S = -\frac{2}{3g}\sqrt{\frac{2}{m}}\,(E - m\,g\,q)^{3/2} - E\,t$$

الإحداثي المعمم الذي تولده الدالة S يساوى $\text{const.} = \beta = \frac{\partial S}{\partial E}$

الإحداثي المعمم الذي تولده الدالة W $= \frac{\partial W}{\partial E}$ ولكن $\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial W}{\partial E} - t$

إذا $\beta = -\frac{1}{g}\sqrt{\frac{2}{m}}\,(E - m\,g\,q)^{1/2} - t$

وعندما $p = mv = 0\ ,\ v = 0,\ q = h,\ t = 0$

$$\beta = 0, \qquad E = mg$$

عند أي زمن t وعند أي موضع نحصل على: $p = mv = m\sqrt{2g}\,(h - q)^{\frac{1}{2}}$

أي $v = -\sqrt{2g}\,(h - q)^{1/2}$

أيضا $-\sqrt{2g}\,(h - g)^{1/2} - t = 0$ ومنها $q = h - 1/2(gt^2)$

نكون إذا قد عينا السرعة والموضع عند أي لحظة t .

بالنسبة للدالة S:

عند $u = \infty\ ,\ v = 0,\ q = h,\ t = 0$

عند $u = \sqrt{\frac{g\,h}{2}}\ ,\ v = \sqrt{2\,g\,L}\ , q = 0\ , t = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}$

أي أن السطح $S = \text{const.}$ (وهو عبارة عن مستو يبدأ حركته بسرعة تخيلية كبيرة جداً عندما كانت سرعة الجسيم تساوي الصفر. ويهبط معه مع تناقص سرعته وازدياد

سرعة الجسيم إلى أن يصل الجسيم إلى الأرض بسرعة $v=\sqrt{2gh}$ فتصبح سرعة السطح $S = \text{const.}$ عندئذ $u=\frac{v}{2}=\sqrt{(gh)/2}$

مثال٥: للمتذبذب التوافقي اكتب معادلة هاملتون ومن الحل صف الحركة.

الحل

نفرض أن $x = q$ هو الموضع (الإحداثي المعمم) فإن دالة الجهد تساوي $\frac{1}{2}kq^2$ حيث k ثابت من ثم

$$T=\frac{1}{2}m\dot{q}^2, \qquad L=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}kq^2 \tag{1}$$

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=m\dot{q} \qquad , \qquad \dot{q}=\frac{p}{m} \tag{2}$$

$$H=\sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = p\dot{q}-(\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}kq^2) \tag{3}$$

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{k}{2}q^2 \tag{4}$$

معادلة هاملتون جاكوبي تصبح

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}(\frac{\partial S}{\partial q})^2+\frac{1}{2}kq^2=0 \tag{5}$$

لحل المعادلة (5) نحاول فصل المتغيرات نفترض الحل في الصورة :

$$S=S_1(q)+S_2(t) \tag{6}$$

فنحصل على

$$\frac{1}{2m}(\frac{dS_1}{dq})^2+\frac{1}{2}kq^2=-\frac{dS_2}{dt} \tag{7}$$

بمساواة كل طرف بالثابت β (لأن الطرفين متساويين والأيسر دالة في متغير والأيمن في متغير آخر) نحصل على

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dq}\right)^2+\frac{1}{2}kq^2=\beta \quad , \quad \frac{dS_2}{dt}=-\beta \tag{8}$$

وحل المعادلات بحذف ثوابت التكامل تكون الحلول

$$S_1=\int\sqrt{2m\left(\beta-\frac{1}{2}kq^2\right)}\;dq \tag{9}$$

$$S_2=-\beta t \tag{10}$$

بالتعويض في (6) نحصل على

$$S=\int\sqrt{2m\left(\beta-\frac{1}{2}kq^2\right)}\;dq-\beta t \tag{11}$$

وبمساواة كمية الحركة p بالثابت β ينتج أن الموضع الجديد هو

$$Q=\frac{\partial S}{\partial p}=\frac{\sqrt{2m}}{2}\int\frac{dq}{\sqrt{\beta-\frac{1}{2}kq^2}}-t$$

وحيث أن $Q=const.=\gamma$ فإن

$$\frac{\sqrt{2m}}{2}\int\frac{dq}{\sqrt{\beta\;\frac{1}{2}kq^2}}-t=\gamma$$

وبعد التكامل نحصل على

$$\sqrt{\frac{m}{k}}\sin^{-1}\left(q\sqrt{\frac{k}{2\beta}}\right)=t+\gamma \quad\Rightarrow\quad q=\sqrt{\frac{2\beta}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}(t+\gamma)$$

وهذا هو الحل الذي يصف الحركة لموضع الجسيم والثوابت β, γ تتعين من الشروط الابتدائية.

مثال٦:
باستخدام طريقة هاملتون - جاكوبي أوجد حركة نقطة مادية في مجال جذب مركزي يخضع لقانون التربيع العكسي ومسألة كبلر Kapler's problem

الحل

الحركة مستوية وطاقة الوضع $V = -\frac{\mu}{r}$ ، إذن معادلة لاجرانج ستكون:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{\mu}{r} \tag{1}$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \quad , \; p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \tag{2}$$

دالة لاجرانج تصبح

$$L = \frac{1}{2m}[p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}] + \frac{\mu}{r} \tag{3}$$

إذاً دالة هاملتون تصبح $H = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$

$$H = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}) - \frac{\mu}{r} \tag{4}$$

بوضع $p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta}$ ، $p_r = \frac{\partial S}{\partial r}$ في (4) نحصل على

$$H = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 \right] - \frac{\mu}{r} \tag{5}$$

وتصبح معادلة هاملتون - جاكوبي في الصورة

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2\right]-\frac{\mu}{r} \qquad (٦)$$

لحل المعادلة (6) نستخدم فصل المتغيرات

$$S=S_1(r)+S_2(\theta)+S_3(t) \qquad (7)$$

بالتعويض من (7) في (6) فنحصل على :

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S_2}{\partial \theta}\right)^2\right]-\frac{\mu}{r}=-\frac{dS_3}{dt}$$

وبمساواة كل طرف بالثابت β_3 ينتج أن

$$S_3=-\beta_3 t \qquad (8)$$

وكذلك:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S_2}{\partial \theta}\right)^2\right]-\frac{\mu}{r}=\beta_3$$

$$\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2=p^2\left[2m\beta_3+\frac{2m\mu}{r}-\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2\right] \qquad (9)$$

وبفصل المتغيرات ينتج أن

$$S_2=\beta_2\theta \quad , p^2\left[2m\beta_3+\frac{2m\mu}{r}-\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2\right]=\beta_2^2 \qquad (10)$$

أي أن

$$\frac{dS_1}{dr}=\sqrt{2m\beta_3+\frac{2\mu m}{r}-\frac{\beta_2^2}{r^2}}$$

$$\therefore\ S_1 = \int \sqrt{2\,m\,\beta_3 + \frac{2\,\mu\,m}{r} - \frac{\beta_2^2}{r^2}}\,d\,r \qquad (11)$$

الحل سيكون

$$S = \int \sqrt{2\,m\,\beta_3 + \frac{2\,\mu\,m}{r} - \frac{\beta_2^2}{r^2}}\,d\,r + \beta_2\,\theta - \beta_3\,t \qquad (12)$$

بمساواة $p_r\ ,p_\theta$ بالثوابت $\beta_2\ ,\beta_3$ ينتج أن

$$Q_3 = \frac{\partial S}{\partial \beta_2} = \gamma_2 \quad , \ Q_\theta = \frac{\partial S}{\partial \beta_3} = \gamma_3 \qquad (13)$$

وبإجراء التفاضلات بالنسبة إلى β_2 ، β_3 نحصل على

$$\int \frac{\beta_2\,d\,r}{r^2\sqrt{2\,m\,\beta_3 + \frac{2\,\mu\,m}{r} - \frac{\beta_2^2}{r^2}}} = \theta - \gamma_2 \qquad (14)$$

$$\int \frac{m\,d\,r}{\sqrt{2\,m\,\beta_3 + \frac{2\,m\mu}{r} - \frac{\beta_2^2}{r^2}}} = t + \gamma_3 \qquad (15)$$

وحل المعادلة (14) نحصل عليه بوضع $r = \frac{1}{u}$ وبعد التكامل نحصل على

الإحداثي المعمم الثابت الذي تولده $S = \frac{\partial S}{\partial E} = \beta =$ ثابت

الإحداثي المعمم الذي تولده الدالة $W = \frac{\partial W}{\partial t}$

نعلم أن $\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial W}{\partial E} - t$

إذن $\beta = \frac{1}{g}\sqrt{\frac{2}{m}}\,(E - m\,g\,q)^{1/2} - t$

عند $t = 0$ ، $q = h$ ، $v = 0$ ، $\therefore p = m\,v = 0$

عند أي زمن t وعند أي موضع نحصل على

$$p = m\,v = m\sqrt{2\,g}\,(h - q)^{1/2}$$

أي أن

$$v = 2\sqrt{2g(h-q)} = \sqrt{\frac{2}{g}}(h-q)^{1/2} - t = 0 \Rightarrow \quad g = h - \frac{1}{2}gt^2$$

وهذا هو الموضع عند الزمن t، بالنسبة إلى الدالة S

$$S = -\frac{2}{3g}\sqrt{\frac{2}{m}}(m\,g)^{3/2}(h-q)^{3/2} - m\,g\,h\,t$$

$$= -m\,g\,h[\frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{h\sqrt{g}}(h-g)^{3/2} + t]$$

أي أن هناك مستوى أفقي يهبط مع هبوط الجسم معادلته هي

$$\frac{2\sqrt{2}}{3h\sqrt{g}}(h-g)^{3/2} + t = \text{const}$$

مقدار سرعة هبوط هذا المستوى يتعين من

$$\frac{\sqrt{2}}{h\sqrt{g}}(h-g)^{1/2}\left(-\frac{dq}{dt}\right) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{dq}{dt} = \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{2}}$$

مثال٧:

يتحرك جسيم بحيث أن دالة هاملتون له تعطى من $H = \frac{1}{2}p^2 - \frac{\mu}{q}$ حيث q هو الإحداثي المعمم، p كمية الحركة المعممة. ابحث الحركة باستخدام معادلة هاملتون جاكوبي.

الحل

حيث أن H لا تعتمد على t صراحة فيكون: $H = E = \text{const.}$

حيث E هي الطاقة الكلية للجسيم وحيث أن: $p = \frac{\partial W}{\partial q}$

حيث W هي دالة هاملتون المميزة. إذن يمكن كتابة معادلة هاملتون جاكوبي في الصورة

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 - \frac{\mu}{q} = E \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2\left(E + \frac{\mu}{q}\right)}$$

بالتكامل:

$$\therefore\ W = \int \sqrt{2\left(E + \frac{\mu}{q}\right)}\, d\, q$$

دالة هاملتون الرئيسية S هي:

$$S\ (q, E, t) = W\ (q, E\ ) - E\ t$$

$$\therefore S(q, E, t) = \int \sqrt{2\left(E + \frac{\mu}{q}\right)}\, d\, q - E\ t$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} \equiv \frac{\partial S}{\partial E} \equiv \gamma = \frac{\partial W}{\partial E} - t \quad \therefore\ \gamma + t = \frac{\partial W}{\partial E} = \int \frac{d\, q}{\sqrt{2\left(E + \frac{\mu}{q}\right)}}$$

بوضع $\frac{2\mu}{q} = 2\, E \cot^2 \theta$

$$\therefore\ \sqrt{2\, E + \frac{2\mu}{q}} = \sqrt{2\, E}\ \text{cosec}\,\theta \quad , \quad d\, q = \frac{2\mu}{E} \tan\theta\ \sec^2\theta\, d\,\theta$$

$$\therefore\ \gamma + t = \int \frac{\frac{2\mu}{E}\tan\theta\ \sec^2\theta}{\sqrt{2\, E}\ \text{cosec}\,\theta}\, d\,\theta$$

$$= \frac{2\mu}{E\sqrt{2\, E}} \int \tan^2\theta\ \sec\theta\, d\,\theta = \frac{2\mu}{E\sqrt{2\, E}}\, I$$

حيث

$$I \equiv \int \tan^2\theta\ \sec\theta\, d\,\theta = \int \tan\theta\left(\sec\theta \tan\theta\right) d\,\theta$$

$$= \int \tan\theta\ d\left(\sec\theta\right)$$

بالتكامل بالتجزيء

$$\therefore I = \tan\theta\ \sec\theta - \int \sec\theta \sec^2\theta\, d\,\theta$$

$$= \tan\theta\ \sec\theta - \int \sec\theta(1 - \tan^2\theta)\, d\,\theta$$

$$= \tan\theta\ \sec\theta - \int \sec\theta\, d\,\theta - I$$

$$\therefore 2I = \tan\theta \ \sec\theta \ - \ln\left(\sec\theta \ + \tan\theta\ \right)$$

$$\therefore \gamma + t = \frac{2\mu}{E\sqrt{2E}} \cdot \frac{1}{2}\left[\tan\theta \ \sec\theta \ - \ln\left(\sec\theta \tan\theta\right)\right]$$

$$= \frac{\mu}{E\sqrt{2E}} \cdot \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{qE}{\mu}}\sqrt{1+\frac{qE}{\mu}} - \ln\left(\sqrt{1+\frac{qE}{\mu}}+\sqrt{\frac{qE}{\mu}}\right)\right]$$

وهي العلاقة بين الإحداثي q والزمن t. الثوابت γ ، $\beta \equiv E$ تتعين من الشروط الابتدائية إن وجدت.

تمارين

١- استخدم مبدأ هاملتون لدراسة حركة البندول البسيط.

٢- حل مسألة المقذوف باستخدام مبدأ هاملتون.

٣- أثبت أن التحويل $P=-q, \quad Q=P$ يكون فيصليا.

٤- أثبت أن التحويل $P=\operatorname{In}\sin P, \quad Q=q\tan P$ يكون فيصليا.

٥- أ) أثبت أن دالة هاملتون للمذبذب التوافقي يمكن كتابتها على الصورة:

$$H=\frac{1}{2}P^2/m+\frac{1}{2}kq^2$$

ب) أثبت أن التحويل:

$$q=\sqrt{\frac{P}{\sqrt{k}}}\sin Q, \quad P=\sqrt{mP\sqrt{k}}\cos Q$$

جـ) أكتب دالة هاملتون للجزء (أ) بدلالة Q,P وأثبت أن Q تكون درجة دورية

د) أدرس حركة المذبذب التوافقي باستخدام النتائج السابقة.

٦- أثبت أن الدالة المولدة التي تسبب التحويل الفيصلي في المسألة السابقة (ب) تكون: $S=\sqrt{k}q^2\cos Q$

٧- أثبت أن نتيجة تحويلين فيصليين متعاقبين أو أكثر تكون أيضا فيصليه.

٨- استخدم معادلة هاملتون–جاكوبي في دراسة حركة جسيم يسقط رأسيا في مجال جاذبية منتظم.

٩- أ) أوجد معادلة هاملتون–جاكوبي لحركة جسيم ينزلق إلى أسفل على مستوي مائل أملس زاويته α.

ب) حل معادلة هاملتون–جاكوبي في (أ) ثم أوجد حركة الجسيم.

١٠- حل مسألة المقذوف الذي أطلق بسرعة v_0 في اتجاه يصنع زاوية α مع الأفقي مستخدما طريقة هاملتون – جاكوبي.

١١- استخدم طريقة هاملتون–جاكوبي في وصف حركة وإيجاد تردد مذبذب توافقي في: أ- بعدين ب- ثلاثة أبعاد

١٢- استخدم طريقة هاملتون–جاكوبي لتحصل على الدالة المولدة في المسألة (١١) السابقة.



أقواس بواسون ولاجرانج
Poisson and Lagrang brackets

* أقواس لاجرانج
* أقواس بواسون
* خواص أقواس بواسون
* اختبار قانونية التحويل باستخدام أقواس بواسون ولاجرانج
* أمثلة وتمارين

الفصل السابع

أقواس بواسون ولاجرانج

Poisson and Lagrang brackets

اولا: أقواس لاجرانج

علمنا أن الخاصية الأساسية للتحويل القانوني هي أن معادلات هاملتون تظل محتفظة بصورتها المعتادة أي لا تغيرية تحت تأثير التحويل القانوني ولكن هل توجد صيغ أخرى لا تغيرية تحت تأثير التحويل القانوني.

نعم وهو $J = \iint_S \sum_{\alpha=1}^{n} d\,q_\alpha\, d\,p_\alpha$ لا تغيري تحت تأثير التحويل القانوني وهو تكامل سطحي تتعين فيه النقطة من قيم ما p_α ، q_α (نظرية بوانكارية)

والتكامل السابق يمكن كتابته أيضاً بالنسبة لأي إحداثيات $P_\alpha = P_\alpha(q_\alpha, p_\alpha)$ ، $Q_\alpha = Q_\alpha(p_\alpha, q_\alpha)$ أي

$$\iint_S \sum d\,q_\alpha\, d\,p_\alpha = \iint_S \sum d\,P\, d\,Q_\alpha \qquad (1)$$

والذي يمكن كتابته في صورة جاكوبي

$$\iint_S \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial(q_\alpha, p_\alpha)}{\partial(u,v)}\, d\,u\, d\,v = \iint_S \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{\partial(Q_\alpha, P_\alpha)}{\partial(u,v)}\, d\,u\, d\,v \qquad (2)$$

أي

$$\iint_S \sum \frac{\partial(q_\alpha, p_\alpha)}{\partial(u,v)} = \iint_S \sum \frac{\partial(Q_\alpha, P_\alpha)}{\partial(u,v)} \qquad (3)$$

والمحددات الجاكوبية لا تغيري تحت تأثير التحويل القانوني والذي يمكن كتابته في الصورة

$$\sum_{\alpha}\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial u}\frac{\partial p_\alpha}{\partial v}-\frac{\partial p_\alpha}{\partial v}\frac{\partial q_\alpha}{\partial u}\right)=\sum_{\alpha}\left(\frac{\partial Q_\alpha}{\partial u}\frac{\partial p_\alpha}{\partial v}-\frac{\partial p_\alpha}{\partial v}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial u}\right) \quad (4)$$

الطرف الأيسر من المعادلة (4) يسمى بقوس لاجرانج للكميتين u, v في الإحداثيات P_α , Q_α ويكتب بالشكل

$$\{u , v\}_{q,p}=\sum_{\alpha}\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial u}\frac{\partial p_\alpha}{\partial v}-\frac{\partial p_\alpha}{\partial v}\frac{\partial q_\alpha}{\partial u}\right)$$

أو

$$\{u , v\}_{Q,p}=\sum_{\alpha}\left(\frac{\partial Q_\alpha}{\partial u}\frac{\partial p_\alpha}{\partial v}-\frac{\partial p_\alpha}{\partial v}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial u}\right)$$

وحيث أن $\{u , v\}_{q,p}=\{u, v\}_{Q,p}$ فسوف نهمل المكتوب أسفل الأقواس ويصبح قوس لاجرانج $\{u, v\}$

وواضح من تعريف قوس لاجرانج أن :

$$\{q_\alpha , p_\beta\}=\delta_{\alpha\beta}\begin{cases}1 & \alpha=\beta\\ 0 & \alpha\neq\beta\end{cases} \quad (5)$$

$$\{u , v\}=-\{u, v\} \quad (6)$$

ثانيا: أقواس بواسون

من الموضوعات والوسائل المفيدة جدا في الميكانيكا التحليلية هو ما يعرف بأقواس بواسون. والسبب في ذلك أنها تلعب دورا هاما في استنباط الصيغة القانونية لمعادلة الحركة ولأي اختيار للإحداثيات وكميات الحركة المعممة المستقلة. كذلك فإنها تربط بين الميكانيكا التحليلية وميكانيكا الكم وكيفية إدخال المؤثرات التفاضلية في ميكانيكا الكم بدلا من الكميات الطبيعية في الميكانيكا التحليلية.

تعريف أقواس بواسون: Def. of Piosson's Brakets

إذا كانت لدينا منظومة ميكانيكية يتحدد موضعها بمجموعة الإحداثيات المعممة $q_\alpha(\alpha=1,2,......,n)$ فإن أي كمية طبيعية f خاصة بهذه المنظومة سوف تعتمد على الإحداثيات المعممة q_α وكميات الحركة المعممة p_α وربما الزمن t أيضا، أي أن:

$$f=f(q_\alpha,p_\alpha,t) \tag{1}$$

وعلى ذلك معدل تغير هذه الدالة f بالنسبة للزمن يكون:

$$\frac{df}{dt}=\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha\right)+\frac{\partial f}{\partial t} \tag{2}$$

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة حركة الدالة f حيث تعطينا تطور الدالة f مع الزمن وباستخدام معادلات هاملتون المستنتجة من قبل الصورة:

$$\dot{q}_\alpha=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \quad , \quad \dot{p}_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \tag{3}$$

نجد أن المعادلة (٢) يمكن كتابتها على الصورة:

$$\frac{df}{dt}=\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)+\frac{\partial f}{\partial t} \tag{4}$$

وعادة تكتب هذه المعادلة على الصورة التالية:

$$\frac{df}{dt}=[f,H]+\frac{\partial f}{\partial t} \tag{5}$$

وتسمى الكمية $[f,H]$ بقوس بواسون للدالتين f,H وهو:

$$[f,H]=\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right) \tag{6}$$

وعموما يكون تعريف قوس بواسون لأي دالتين f,g على الصورة:

$$[f,g]=\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\right) \tag{7}$$

وتأتى أهمية أقواس بواسون في التعرف على ما يسمى بتكاملات الحركة Integrals of motion وهذه هي ثوابت الحركة constant of motion إذا كانت الدالة f لا تعتمد صراحة على الزمن t أي أن $\frac{\partial f}{\partial t}=0$ فيكون شرط ثبوت الدالة بالنسبة للزمن هو أن يتلاشى قوس بواسون لتلك الدالة f مع دالة هاملتون H هذا حيث أن: $[f,H]=0$ وكذلك $\frac{\partial f}{\partial t}=0$ فإنه ينتج من المعادلة (٥) أن $\frac{df}{dt}=0$ وبهذا تصبح الدالة f من ثوابت الحركة.

خواص أقواس بواسون:

إذا كانت f,g دالتان تعتمدان على الإحداثيات المعممة q_s وكميات الحركة المعممة p_s والزمن t فإن:

$$1)\ [f,g]=-[g,f] \qquad 2)\ [f_1+f_2,g]=[f_1,g]+[f_2,g]$$

$$3)\ [f,q_\alpha]=-\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \qquad 4)\ [f,p_\alpha]=\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}$$

الإثبات:

$$1)\ [f,g]=\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\right)$$

بتبديل الحد الأول مع الثاني في الطرف الأيمن نجد أن:

$$[f,g]=-\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\right)$$

$$= -\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right)$$

$$= -[g, f]$$

$$2)\ [f_1 + f_2, g] = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial(f_1 + f_2)}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial(f_1 + f_2)}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\right)$$

$$[f_1 + f_2, g] = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f_2}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\right) - \left(\frac{\partial f_1}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial f_2}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\right)$$

$$[f_1 + f_2, g] = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f_1}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\right)$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f_2}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\right) = [f_1, g] + [f_2, g]$$

$$3)\ [f, q_\alpha] = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial q_\alpha}{\partial p_s} - \frac{\partial f}{\partial p_s}\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_s}\right)$$

حيث أن $\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_s} = 1$ في حالة ما إذا كانت $s = \alpha$ وكذلك $\frac{\partial q_\alpha}{\partial p_s} = 0$ لعدم اعتماد q_α على p_s لذا نجد أن:

$$[f, p_\alpha] = -\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}$$

$$4)\ [f, p_\alpha] = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_s}\frac{\partial p_\alpha}{\partial p_s} - \frac{\partial f}{\partial p_s}\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_s}\right) = \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}$$

وذلك لأن $\frac{\partial p_\alpha}{\partial p_s} = 1$ عندما $\alpha = s$ ويساوى صفرا عندما $\alpha \neq s$.

هذا ويمكن أيضا إضافة الخواص التالية:

إذا كانت c كمية ثابتة فإن:

$$5)\ [f, f] = 0 \quad , \quad 6)\ [f, c] = 0$$

وإذا كانت h دالة ثالثة تعتمد على الإحداثيات المعممة وعلى كميات الحركة المعممة فإنه يمكن إثبات أن:

$$7)\ [h,f,g] = h[f,g] + [h,g]f$$

$$8)\ \frac{\partial}{\partial t}[f,g] = [\frac{\partial f}{\partial t}, g] + [f, \frac{\partial g}{\partial t}]$$

$$9)\ [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] = 0$$

وتعرف الخاصية الأخيرة بأنها متطابقة جاكوب Jacobi Identity ويلاحظ فيها أن الدوال f, g, h تبقى في ترتيب دوري واحد عند استخدامها في حدود المتطابقة الثلاثة. هذا ويجب ملاحظة أنه عند الإثبات قد نستخدم العلاقات التالية:

$$\frac{\partial}{\partial q}(hf) = h\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial h}{\partial q} f$$

$$[p_\ell, p_k] = 0 \quad , \quad [q_\ell, q_k] = 0 \quad , \quad [q_\ell, p_k] = \delta_{\ell k}$$

حيث كما نعلم بأن $\delta_{\ell k}$ هي كر ونكر دلتا المعرفة كالتالي:

$$\delta_{\ell k} = \begin{cases} 1 & \ell = k \\ 0 & \ell \neq k \end{cases}$$

ويمكن بسهولة باستخدام أقواس بواسون استنتاج أن دالة هاملتون H هي أحد ثوابت الحركة إذا لم تعتمد صراحة على الزمن وذلك كالتالي:

إذا كانت H لا تعتمد صراحة فإن $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ ومن الخاصية $[H,H] = 0$ ينتج أن معادلة الحركة تصبح $\frac{dH}{dt} = 0$ وبذلك فإن H تكون ثابت حركة أي أن:

$$H(q_s, p_s) = \text{const.}$$

ثالثا: اختبار قانونية التحويل باستخدام اقواس بواسون ولاجرانج

شـرط قانونيـةالتحويل واضـح مـن ان الاقـواس لاتغيريـة تحـت تـأثير التحويـل القـانونى ويكون شرط التحويل هو:

$$[p,q]=[Q,P]=\frac{\partial(PQ)}{\partial(pq)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial p}{\partial q}\\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial p}\end{bmatrix}=1$$

والتحويل العكسي يكون

$$[P,Q]=[p,q]=\frac{\partial(pq)}{\partial(PQ)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial Q}\\ \frac{\partial Q}{\partial P} & \frac{\partial p}{\partial P}\end{bmatrix}=1$$

بالمثل عند حساب $[Q,p]$ و $[P,q]$ نجد كل منهما =1.

مثال١:

إذا كانت كل من الكميتين $g(q,p,t), f(q,p,t)$ ثابت حركة ٠٠ أي أن: $\frac{dg}{dt}=0\,,\,\frac{df}{dt}=0$ فإن قوس بواسون $[f,g]$ يكون أيضا ثابت حركة وهذا يعنى أن قوس بواسون لأي ثابتي حركة في منظومة ميكانيكية هو نفسه ثابت حركة في نفس المنظومة.

الحل

لكي نثبت أن قوس بواسون $[f,g]$ هو ثابت حركة إذا كانت كل من f,g ثابتي حركة فإننا نحسب معدل تغيره بالنسبة للزمن:

$$\frac{d}{dt}[f,g]=[[f,g],H]+\frac{\partial}{\partial t}[f,g] \qquad (1)$$

حيث أننا استخدمنا معادلة الحركة التي على الصورة:

$$\frac{df}{dt}=[f,H]+\frac{\partial f}{\partial t}$$

ولكن بالنسبة للكمية $[f,g]$ نفسها.

والآن من الخاصتين (٧)،(٨) وبوضع دالة هاملتون H بالإضافة للدالتين f,g في متطابقة جاكوب وكذلك استخدام الخواص الأخرى لأقواس بواسون نجد أن:

$$[f,[g,H]]+[g,[H,f]]+[H,[f,g]]=0$$

$$[f,[g,H]]+[[f,H],g]=[[f,g],H]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[f,g]=[\frac{\partial f}{\partial t},g]+[f,\frac{\partial g}{\partial t}]$$

وبالتعويض في المعادلة (١) نجد أن:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[f,g]&=[f,[g,H]]+[[f,H],g]+[f,\frac{\partial g}{\partial t}]+[\frac{\partial f}{\partial t},g]\\&=[f,[g,H]+\frac{\partial g}{\partial t}]+[[f,H],g]+\frac{\partial f}{\partial t}]\\&=[f,\frac{dg}{dt}]+[\frac{\partial}{dt}(f,g)]\end{aligned}$$

وحيث أن $\frac{dg}{dt}=0\,,\,\frac{df}{dt}=0$ فإن $\frac{d}{dt}[f,g]$ يكون ثابت حركة.

مثال ٢:

أثبت أن متجه كمية الحركة الزاوية (أو عزوم كمية الحركة) $\vec{M}=\vec{r}\wedge\vec{p}$ لنقطة مادية حول نقطة الأصل o يظل متجها ثابتا طول الحركة (أي يكون ثابت حركة) إذا كانت النقطة المادية تتحرك تحت تأثير قوة مركزية مركزه في النقطة o ودالة الجهد لها هي $V(r)$.

الحــل

المتجه $\vec{M}$ يكون ثابت حركة إذا كانت مركباته الكرتيزية الثلاثة M_x, M_y, M_z ثوابت حركة وذلك حيث أن متجهات الوحدة $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ثوابت دائما وأن:

$$\vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$

والآن حيث أن كل من هذه المركبات M_x, M_y, M_z وكذلك المتجه $\vec{M}$ لا يعتمد صراحة على الزمن أي أن:

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = \frac{\partial M_x}{\partial t}\vec{i} + \frac{\partial M_y}{\partial t}\vec{j} + \frac{\partial M_z}{\partial t}\vec{k} = 0 \qquad (1)$$

وحتى تكون المركبات M_x, M_y, M_z وبالتالي $\vec{M}$ ثوابت حركة فيجب أن تتلاشى أقواس بواسون لكل منها مع دالة هاملتون للمنظومة تحت الدراسة. وكما وجدنا من قبل أن دالة هاملتون للنقطة المادية هي:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z) \qquad (2)$$

وحيث أن دالة الجهد V تعتمد على المسافة $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ فقط فإن:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{dV}{dr}\frac{x}{r} = \frac{x}{r}V'$$

وبالمثل

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{y}{r}V', \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{z}{r}V'$$

والآن بحساب أقواس بواسون $[M_x, H]$ من التعريف الأصلي لأقواس بواسون:

$$[M_x, H] = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial M_x}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{\partial M_x}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial p_s}\right)$$

وحيث أن:

$$M_x = yp_z - zp_y$$

وذلك لأن:

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

$$H = \frac{1}{2m^2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(r)$$

$$[M_x, H] = \left(\frac{\partial M_x}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p_x} - \frac{\partial M_x}{\partial p_x}\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial M_x}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial p_y} - \frac{\partial M_x}{\partial p_y}\frac{\partial H}{\partial y}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial M_x}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial p_z} - \frac{\partial M_x}{\partial p_z}\frac{\partial H}{\partial z}\right) = 0 - 0 - p_z\frac{1}{z}p_y - (-z)\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$+(-p_y)\frac{1}{m}p_z - y\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{m}p_z p_y + z\frac{y}{r}V' - \frac{1}{m}p_y p_z - y\frac{z}{r}V'$$

$$= 0$$

وبالتالي فإننا نجد أن حيث أن $\frac{\partial M_x}{\partial t} = 0$ فإنه يصبح ثابت حركة وبالتالي نجد أن:

$$\frac{dM_x}{dt} = [M_x, H] + \frac{\partial M_x}{\partial t} = 0 \Rightarrow M_x$$

بالمثل يمكن إثبات أن M_y, M_z تكون ثابتي حركة إذ نجد:

$$[M_x, H] = 0, [M_y, H] = 0, [M_z, H] = 0$$

وهو المطلوب.

مثال٣:

أوجد حل المثال السابق باستخدام خواص بواسون.

الحــل

$$[M_x,H]=[yp_z-zp_y,H]=[yp_z,H]-[zp_y,H]$$
$$=y[p_z,H]+[y,H]p_z-z[p_y,H]-[z,H]p_y$$
$$[M_x,H]=y(-\frac{\partial H}{\partial z})+(\frac{\partial H}{\partial p_y})p_z-z(-\frac{\partial H}{\partial y})-(\frac{\partial H}{\partial p_z})p_y$$
$$=-y\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{1}{m}p_yp_z+z\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{1}{m}p_zp_y=-y\frac{z}{r}V'+z\frac{y}{r}V'=0$$

وبالمثل: $[M_y,H]=0 \quad , \quad [M_z,H]=0,$

وبالتالي ينتج أن: $[\vec{M},H]=0$

مثال٤:

أوجد أقواس بواسون للمركبات الكرتيزية لكل من المتجهين $\vec{r},\vec{p}$ اللذين يمكن كتابتهما على الصورة:

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \quad , \quad \vec{p}=p_x\vec{i}+p_y\vec{j}+p_z\vec{k}$$

الحــل

أولا: المتجه $\vec{r}$ مع نفسه:

$$[x,x]=0, \quad [y,y]=0, \quad [z,z]=0$$

ثانيا: المتجه $\vec{p}$ مع نفسه:

$$[p_x,p_x]=0, \quad [p_y,p_y]=0, \quad [p_z,p_z]=0$$

ثالثا المتجه $\vec{r}$ مع المتجه $\vec{p}$

$$[x,p_x]=1 \quad , \quad [x,p_y]=0 \quad , \quad [x,p_z]=0$$
$$[y,p_x]=0 \quad , \quad [y,p_y]=1 \quad , \quad [y,p_z]=0$$
$$[z,p_x]=0 \quad , \quad [z,p_y]=0 \quad , \quad [z,p_z]=1$$

وجميع هذه الأقواس واردة في الخواص المدمجة التالية:

$$[q_\ell,q_k]=0 \quad , \quad [p_\ell,p_k]=0 \quad , \quad [q_\ell,p_k]=\delta_{\ell k}$$

مثال ٥:

إذا كانت H هي دالة هاملتون، فأثبت أنه إذا كانت f هي أي دالة تعتمد على الموضع وكميات الحركة والزمن فإن: $\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+[H,f]$

الحـل

التفاضل الكلي للدالة **f** هو:

$$df=\frac{\partial f}{\partial t}dt+\sum_\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\partial q_\alpha+\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\partial p_\alpha\right) \qquad (1)$$

المشتقة الكلية بالنسبة للزمن تعطي من:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha\right) \qquad (2)$$

ولكن من معادلات هاملتون نعلم أن:

$$\dot{q}_\alpha=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \dot{p}_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \qquad (3)$$

من (٣)، (٢) نجد أن:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)=\frac{\partial f}{\partial t}+[H,f]$$

وهو المطلوب.

تمارين

١) أثبت المتطابقة التالية لأقواس بواسون:

$$[f_1,[f_2,f_3]]+[f_2,[f_3,f_1]]+[f_3,[f_1,f_2]]=0$$

٢) أثبت المتطابقة التالية لأقواس بواسون:

$$[h,f,g]=h[f,g]+[h,g]f$$

٣) أثبت المتطابقة التالية لأقواس بواسون:

$$\frac{\partial}{\partial t}[f,g]=[\frac{\partial f}{\partial t},g]+[f,\frac{\partial g}{\partial t}]$$



دراسة حركة جسم متماسك
باستخدام معادلات لاجرانج

* تعريفات
* قانون العزم والعجلة الزاوية
* طاقة حركة جسم يتحرك حركة مستوية
* كمية الحركة الزاوية لجسم متماسك
* دراسة حركة البندول المركب
* دراسة كرة تتدحرج على مستوى مائل خشن

الفصل الثامن
دراسة حركة جسم متماسك
باستخدام معادلات لاجرانج

❖ تعريف الجسم المتماسك (الجاسئ):

هو ذلك الجسم الذي تظل المسافة بين أي نقطتين فيه ثابتة مهما أثرنا عليه من قوة.

❖ تعريف اللي أو عزم القوة:

يعرف بأنه فاعلية هذه القوة في توليد دوران محوريا ويقاس بحاصل ضرب قيمة هذه القوة x المسافة العمودية بين محور الدوران وخط عمل أو تأثير هذه القوة.

∴ العزم = القوة x المسافة العمودية(مقاسة من محور الدوران إلى خط عمل القوة).

= القوة x الذراع (ذراع القوة).

❖ قانون العزم والعجلة الزاوية:

إذا ما تعرض جسم عزم قصوره (I) لتأثير قوة ذات عزم غير موازن وليكن (L) اكتسب الجسم عجلة زاوية α بحيث أن:

$$L = I\alpha$$

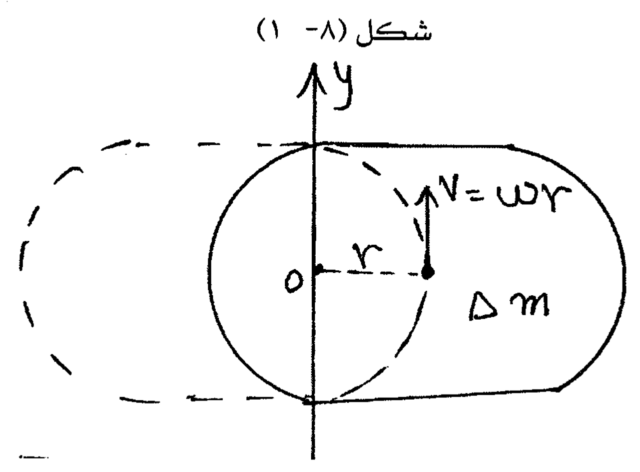
أي أن العزم=(عزم القصور) مضروبا في (العجلة الزاوية) .

طاقة حركة جسم يتحرك حركة مستوية

أ) طاقة الحركة في الجسم الذي يعمل حركة دورانية بحتة:

عندما يدور جسم متماسك حول محور ثابت o فإن جميع نقط الجسم تتحرك بنفس السرعة الزاوية ω وتتوقف طاقة حركته الدورانية على:

شكل (٨- ١)



(i) السرعة الزاوية.

(ii) طريقة توزيع الكتل المكونة للجسم حول محور الدوران.

فإذا فرضنا أنه لدينا عنصر صغير "جسيم" من الجسيم كتلته Δm يدور حول محور ما ويبعد المحور عن مركز كتلة الجسيم Δm بمسافة r وكانت سرعة الجسيم الزاوية هي سرعة الجسم ككل "ω" فإن طاقة الحركة للجسيم تعطى من:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\Delta m v^2$$

$$\because v = \omega r$$

$$\therefore \Delta E_k = \frac{1}{2}\Delta m \omega^2 r^2 \qquad (1)$$

طاقة الحركة للجسم ككل تصبح على النحو التالي:

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \Delta E_k$$

$$= \frac{1}{2}\Delta m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2}\Delta m_2 r_2^2 \omega^2 + \ldots\ldots$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2 \omega^2$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2$$

وذلك لأن السرعة الزاوية ثابتة للجسيم ككل أي لكل عناصره ويعرف $\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i r_i^2$ بعزم القصور الذاتي للجسم حول محور الدوران ويرمز له بالرمز I

$$\therefore\ E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (2)$$

أي أن طاقة الحركة الدورانية = $\frac{1}{2}$ عزم القصور الذاتي للجسم x مربع السرعة الزاوية.

❖ كمية الحركة الزاوية لجسم متماسك

بفرض أن لدينا كتلة Δm من جسم تتحرك حول محور الدوران بسرعة خطية **V** .

∴ كمية الحركة الخطية هي Δmv وبما أن $v = \omega r$ ،

∴ كمية الحركة للكتلة Δm = $\Delta m\, \omega\, r$

وعزم كمية الحركة حول محور= $\Delta m\, \omega\, \vec{r}.\vec{r}$

$$= \Delta m\, \omega\, r^2$$

ويسمى عزم كمية الحركة حول محور الدوران بكمية الحركة الزاوية

كمية الحركة الزاوية للجسم كله. = $\sum_i (\Delta m_i r_i^2)\omega$

$$= \omega \sum_i (\Delta m_i r_i^2)$$

(3) $= \omega I$

والآن يمكن أن نكتب الكميات الميكانيكية المتشابهة للحركة الخطية والحركة الدورانية.

الحركة الخطية	رمزها	الحركة الزاوية	رمزها
الإزاحة الخطية	x	الإزاحة الزاوية	θ
السرعة الخطية	$v = \dot{x}$	الزاوية	$\omega = \dot{\theta}$
العجلة الخطية	$f = \ddot{x}$	العجلة الزاوية	$\alpha = \ddot{\theta}$
الكتلة	m	عزم القصور الذاتي	I
القوة	F	عزم القوة	L
كمية الحركة الخطية	mv	كمية الحركة الزاوية	$I\omega$
كمية الحركة الخطية	$\frac{1}{2}mv^2$	طاقة الحركة الزاوية	$\frac{1}{2}\omega^2 I$

❖ تطبيقات على حركة جسم جاسئ باستخدام القانون الثاني لنيوتن ثم معادلات لاجرانج:

أولا: دراسة حركة البندول المركب:

البندول المركب هو عبارة عن جسم متماسك كتلته m مثبت بإحكام حول محور أملس بحيث يمكن للجسم أن يدور حول هذا المحور بسهولة ثم ثبت المحور في جدار فإذا تذبذب هذا الجسم حول محور التثبيت الأفقي تحت تأثير وزنه.

المطلوب الآن هو دراسة حركة هذا البندول المركب.

أولا: بالميكانيكا الكلاسيكية

شكل (٨- ٢)

نعتبر أن مركز ثقل الجسم هو عند نقطة c التي تبعد بمقدار a من نقطة التعليق o (والتي عندها محور الدوران). ونفرض أن co العمودي على محور الدوران المثبت في الجدار فإذا كان co يصنع زاوية θ مع الرأسي المار بنقطة o وهو AB عند أي لحظة زمنية t.

القوى المؤثرة على الجسم هي:

(i) الوزن mg رأسيا إلى أسفل.

(ii) رد الفعل عند محور الدوران الذي يمكن تحليله إلى مركبتين هما X في اتجاه CO ومركبة Y في الاتجاه العمودي على CO ونفرضهم في أي اتجاه وتتعين هذه الاتجاهات بعد حل المسألة.

بما أن مركز ثقل الجسم C سوف يرسم دائرة مركزها O ونصف قطرها a فيكون لها عجلتان هما $(-a\dot{\theta}^2, a\ddot{\theta})$ في الاتجاه العمودي على a وفي اتجاه زيادة a.

معادلات الحركة للجسم المتماسك (معادلات خطية ومعادلات دورانية) تصبح على النحو التالي:

❖ معادلة الحركة في اتجاه CO.

$$ma\dot{\theta}^2 = X - mg\cos\theta \qquad (1)$$

❖ معادلة الحركة في اتجاه عمودي على CO.

$$ma\ddot{\theta} = Y - mg\sin\theta \qquad (2)$$

❖ معادلة الحركة الدورانية. (بأخذ العزوم حول o).

$$I_o\ddot{\theta} = -mga\sin\theta \qquad (3)$$

ولكن I_o هو عزم القصور الذاتي للجسم حول محور عمودي على مستوى الحركة ويمر بنقطة التعليق ويمكن إيجاده بدلالة عزم القصور عند مركز ثقل الجسم كالتالي:

$$I_o = I_c + ma^2 \qquad (4)$$

والمعادلة (٣) يمكن كتابتها على الصورة:

$$I_o\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -mga\sin\theta$$

بفصل المتغيرات نجد أن:

$$I_o\dot{\theta}d\dot{\theta} = -mga\sin\theta d\theta$$

وبالتكامل بالنسبة إلى θ نجد أن:

$$\frac{1}{2}I_o\dot{\theta}^2 = +mga\cos\theta + c_1 \qquad (5)$$

بالتعويض من (٥) في (١)، (٢) يمكن إيجاد مركبتي رد الفعل عند o. وإذا تذبذب الجسم ذبذبات صغيرة حول نقطة التعليق o بحيث كانت θ صغيرة يمكن إجراء التقريب:

$$\sin\theta \cong \theta$$

وبذلك المعادلة (٣) تصبح:

$$I_o\ddot{\theta} = -mga\theta$$

أو

$$\ddot{\theta} = -\frac{mga}{I_o}\theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = -\omega^2\theta \qquad (7)$$

حيث $\omega = \sqrt{\dfrac{mga}{I_o}}$ والمعادلة (٧) هي معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري

هو: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{mga}{I_o}}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mga}}$ أو $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_c + ma^2}{mga}}$

ثانيا: باستخدام معادلات لاجرانج:

طاقة الحركة الدورانية للبندول المركب تصبح:

$$T = \frac{1}{2}I_o\dot{\theta}^2$$

حيث I_o هي عزم القصور الذاتي حول نقطة o.

طاقة الجهد بالنسبة للمستوى الأفقي المار بالنقطة o هي: $V = -mga\cos\theta$ وطاقة الحركة هي: $T = \frac{1}{2}I_o\dot{\theta}^2 + mga\cos\theta$ وعلى ذلك تصبح دالة لاجرانج على الصورة التالية:

$$L = T + V$$

معادلة لاجرانج تصبح:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_o \dot{\theta} \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = I_o \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mga\sin\theta$$

وعلى ذلك تصبح معادلة الحركة:

$$\ddot{\theta} = -\frac{ga}{I_o}\sin\theta$$

وهي نفس المعادلة (٣) التي سبق الحصول عليها وذلك باستخدام القانون الثاني لنيوتن.

ثانيا: دراسة كرة تتدحرج على مستوى مائل خشن

دراسة حركة كرة كتلتها m تتدحرج على مستوى مائل خشن لوتد كتلته M يمكنه أن يتحرك على مستوى أفقي أملس (علما بأن زاوية ميل الوتد عن الأفقي هي α).

شكل (٨- ٣)

المطلوب إيجاد كمية الحركة المعممة للنظام، ومعادلات لاجرانج.

لتكن q_1 هي الإزاحة الأفقية للوتد ، q_2 هي إزاحة مركز الكتلة للكرة على طول الحافة المائلة للوتد والكرة تتحرك تحت نوعين من الإزاحات:

١- دورانية ٢- انتقالية.

السرعة الدورانية للكرة (السرعة الزاوية) = $\omega = \frac{\dot{q}_2}{a} = \dot{\theta}$ حيث $\dot{q}_2$ هي السرعة على طول الحافة المائلة. والسرعة الانتقالية للكرة هي:

$$
\begin{aligned}
v^2 &= \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2\cos(180-\alpha) \\
&= \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2\cos\alpha
\end{aligned}
$$

إذا طاقة الحركة نتيجة لدوران الكرة $\frac{1}{2}I_s\omega^2$

ولكن عزم القصور الذاتي للكرة هو: $I_s = \frac{2}{5}ma^2$

إذن طاقة الحركة نتيجة الدوران هي:

$$T_r = \frac{1}{2}\frac{2}{5}ma^2\left(\frac{\dot{q}_2}{a}\right)^2 = \frac{1}{5}m\dot{q}_2^2$$

وطاقة الحركة نتيجة للانتقال هي:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2\cos\alpha)$$

إذن طاقة الحركة الكلية للنظام هي طاقة حركة الكرة بالإضافة إلى طاقة حركة الوتد.

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}M\dot{q}_1^2 + \frac{1}{5}m\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2\cos\alpha) \\
&= \frac{1}{2}(M+m)\dot{q}_1^2 + \frac{7}{10}m\dot{q}_2^2 - m\dot{q}_1\dot{q}_2\cos\alpha
\end{aligned}
$$

طاقة الجهد مع اعتبار أن مستوى القياس هو السطح الأملس هي:

$$V = mg(\ell - q_2)\sin\alpha = K - mgq_2\sin\alpha$$

حيث K ثابت ، ℓ هو طول الحافة المائلة للوتد.

$$L=\frac{1}{2}(M+m)\dot{q}_1^2+\frac{7}{10}m\dot{q}_2^2-m\dot{q}_1\dot{q}_2\cos\alpha+mgq_2\sin\alpha-K$$

$$p_1=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}(M+m)\dot{q}_1-m\dot{q}_2\cos\alpha \qquad (1)$$

$$p_2=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}=\frac{7}{5}m\dot{q}_2-m\dot{q}_1\cos\alpha+mg\sin\alpha \qquad (2)$$

معادلات لاجرانج يمكن أن نحصل عليها الآن كما يلي:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1})=(M+m)\ddot{q}_1-m\ddot{q}_2\cos\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1}=0$$

إذا معادلات لاجرانج هي:

$$(M+m)\ddot{q}_1-m\ddot{q}_2\cos\alpha=0$$

والمعادلة الثانية هي:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2})=\frac{7}{5}m\ddot{q}_2-m\ddot{q}_1\cos\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2}=mg\sin\alpha$$

إذن ثاني معادلات لاجرانج هي:

$$\frac{7}{5}m\ddot{q}_2-m\cos\alpha\ddot{q}_1-mg\sin\alpha=0$$

وبذلك نكون قد حصلنا على معادلات الحركة باستخدام قوانين لاجرانج وهي نفس المعادلات التي يمكن الحصول عليها باستخدام القانون الثاني لنيوتن.

مثال ٣:

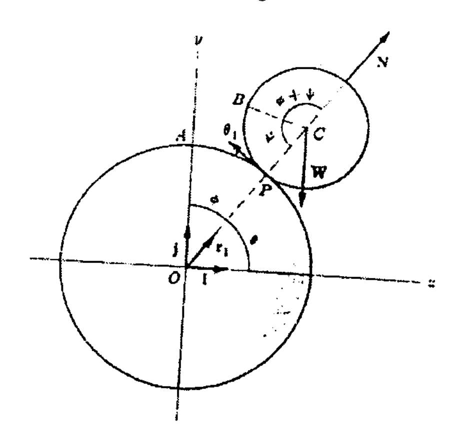
كرة نصف قطرها a وكتلتها m تستقر على قمة كرة خشبية مثبتة نصف قطرها b أزيحت الكرة الأولي قليلا بحيث تدحرجت على الكرة الثانية إلى أسفل دون انزلاق. عند أي نقطة سوف تترك الكرة الثانية الكرة الأولي.

الحـل

أولا: الحل باستخدام ميكانيكا نيوتن:

سوف نختار المستوي xy بحيث يمر بمركزي الكرتين ويكون مركز القوة المثبتة هو نقطة الأصل 0 انظر الشكل(٧- ٤)· أيضا نعتبر أن موضع مركز الكتلة C للكرة الأولي يقاس بالزاوية θ وافترض أن متجه موضع مركز الكتلة هذا بالنسبة إلي C هو $\vec{r}$ نعتبر كذلك أن $\vec{r}_1,\vec{\theta}_1$ هما متجها الوحدة كما يوضحها الشكل (٧- ٥)، بتحليل الوزن

شكل (٨- ٤)



W = − mgj إلي مركبتين في اتجاهي $\vec{r}_1,\vec{\theta}_1$ يكون لدينا:

$$W=(W.\vec{r}_1)\vec{r}_1+(W.\vec{\theta}_1)\vec{\theta}_1$$
$$=(-mgj.\vec{r}_1)\vec{r}_1+(-mgj.\vec{\theta}_1)\vec{\theta}_1$$
$$=-mg\sin\theta\vec{r}_1-mg\cos\theta\vec{\theta}_1$$

قوة رد الفعل $\vec{R}$ وقوة الاحتكاك $\vec{\Re}$ هما $\vec{R}=R\vec{r}_1$, $\vec{\Re}=\Re\vec{\theta}_1$

من القانون الثاني لنيوتن يكون لدينا:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m[(\ddot{r} - \dot{r}\theta^2)\vec{r}_1 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{\theta}_1]$$
$$= \vec{W} + \vec{R} + \vec{\Re}$$
$$= (R - mg\sin\theta)\vec{r}_1 + (\Re - mg\cos\theta)\vec{\theta}_1$$

ومنها يكون:

$$m(\ddot{r} - \dot{r}\theta^2) = R - mg\sin\theta \quad , \quad m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = \Re - mg\cos\theta \quad (1)$$

وحيث أن $a+b = r$ (بعد C عن 0) فإن هاتين المعادلتين تصبحان:

$$-m(a+b)\theta^2 = R - mg\sin\theta \quad , \quad m(a+b)\ddot{\theta} = \Re - mg\cos\theta$$

والآن عزم الدوران الخارجي الكلي لجميع القوي حول الكتلة C (حيث $\vec{R}, \vec{W}$ تمران خلال C) هو:

$$\Lambda = (-a\vec{r}_1) \text{ x } \vec{\Re} = (-a\vec{r}_1) \text{ x } (\Re\vec{\theta}_1) = -a\Re\vec{k}$$

وأيضا العجلة الزاوية للكرة الأولي حول C هو:

$$\alpha = \frac{d^2}{dt^2}(\phi + \psi)\vec{k} = -(\ddot{\phi} + \ddot{\psi})\vec{k}$$

وحيث أنه يوجد فقط تدحرج ولا يوجد انزلاق فإنه ينتج أن القوس AP يساوي القوس BP أو $a\psi = b\phi$ عندئذ يكون:

$$(b/a)(\pi/2 = \psi - \theta), \qquad \pi/2 - \theta = \phi$$

وينتج أن:

$$\vec{\alpha} = -(\ddot{\phi} + \ddot{\psi})\vec{k} = -(-\ddot{\theta} - \frac{b}{a}\ddot{\theta})\vec{k} = (\frac{a+b}{a})\ddot{\theta}\vec{k}$$

بما أن عزم القصور الذاتي للكرة الأولي حول محور الدوران الأفقي المار بالنقطة

$I = \frac{2}{3}ma^2$ فإنه باستخدام مبدأ كمية التحرك الزاوي يكون لدينا:

$$\vec{\Lambda} = I\vec{\alpha}, \quad -a\Re\vec{k} = \frac{2}{3}ma^2(\frac{a+b}{a})\ddot{\theta}\vec{k}$$

أو

$$\Re = -\frac{2}{3}m(a+b)\ddot{\theta}$$

وباستخدام قيمة $\Re$ هذه في المعادلة الثانية من (١) نجد أن:

$$\ddot{\theta} = -\frac{5g}{7(a+b)}\cos\theta \qquad (2)$$

وبضرب الطرفين في $\dot{\theta}$ وإجراء التكامل نجد بعد وضع $\dot{\theta} = 0$ عند $t = 0$ أو: $\theta = \frac{\pi}{2}$ أن:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{10g}{7(a+b)}(1-\sin\theta) \qquad (3)$$

باستخدام(٣) في المعادلة الأولي من (١) نجد أن:

$$R = \frac{1}{2}mg(17\sin\theta - 10)$$

عندئذ يتضح أن الكرة الأولي تترك الكرة الثانية عند $R = 0$ أي عند:

$$\theta = \sin^{-1}10/17$$

ثانيا: الحصول علي معادلات الحركة باستخدام معادلات لاجرانج.

من الشكل (٧- ٥) الذي فيه ψ,ϕ تمثلان إحداثيات معممة. حيث أن الكرة التي نصف قطرها CP=a تتدحرج بدون انزلاق على الكرة التي نصف قطرها OP=b يكون لدينا:

$$b\phi = a\psi \quad \text{أو} \quad bd\phi/dt = ad\psi/dt$$

ولهذا يبين أن:

$$b\phi = a\psi \qquad (1)$$

إذا كانت $\phi = 0$ عندما تكون $\psi = 0$.

وبناء على ذلك تكون كل من ψ, ϕ (وبالتالي $d\psi, d\phi$ أو $\delta\psi, \delta\phi$) غير مستقلة. طاقة حركة الكرة المتدحرجة هي:

$$T = \frac{1}{2}m(a+b)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}m(a+b)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\frac{2}{5}ma^2)(\dot{\phi}+\dot{\psi})^2$$

حيث أن: $I = \frac{2}{5}ma^2$ هو عزم القصور الذاتي للكرة حول محور أفقي يمر بمركز كتلتها وطاقة جهد الكرة المتدحرجة (باعتبار المستوي الأفقي المار خلال 0 مستوي قياسي) هي:

$$V = mg(a+b)\cos\phi$$

بذلك تكون دالة لاجرانج هي:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(a+b)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{5}ma^2(\dot{\phi}+\dot{\psi})^2 - mg(a+b)\cos\phi \qquad (2)$$

سوف نعتبر معادلات لاجرانج للمجموعات غير تامة التقييد لدينا من (١) أن:

$$b\delta\phi - a\delta\psi = 0 \qquad (3)$$

إذا جعلنا: $q_1 = \phi$, $q_2 = \psi$, فإننا نجد بالمقارنة مع معادلة القيود اللحظية التالية:

$$\sum_\alpha A_\alpha \delta q_\alpha = 0 \quad , \quad \sum_\alpha B_\alpha \delta q_\alpha = 0,$$

$$\therefore A_1 = b, \quad A_2 = -a \qquad (4)$$

وبذلك تصبح معادلتا لاجرانج في هذه الحالة على الصورة:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \phi}=\lambda_1 b \qquad (5)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \psi}=\lambda_1 a \qquad (6)$$

بالتعويض عن (٢) في (٥) و(٦) نحصل على:

$$m(a+b)^2\ddot{\phi}+\frac{2}{5}ma^2(\ddot{\phi}+\ddot{\psi})-mg(a+b)\sin\phi=\lambda_1 b \qquad (7)$$

$$\frac{2}{5}ma^2(\ddot{\phi}+\ddot{\psi})=-\lambda_1 a \qquad (8)$$

وبالتعويض عن $\psi=(b/a)\phi$ من (١) في (٧)و(٨) نجد أن:

$$m(a+b)^2\ddot{\phi}+\frac{2}{5}ma^2(1+b/a)\ddot{\phi}-mg(a+b)\sin\phi=\lambda_1 b \qquad (9)$$

$$\frac{2}{5}ma^2(1+b/a)\ddot{\phi}=-\lambda_1 a \qquad (10)$$

والآن من (١٠) يكون لدينا: $\lambda_1=-\frac{2}{5}m(a+b)\phi$

وباستخدام هذه القيمة في (٩) نحصل بعد الاختصار والحل لإيجاد ϕ علي:

$$\ddot{\phi}=\frac{5g}{7(a+b)}\sin\phi$$

وهذه هي نفس المعادلة (٢) في الحل السابق في أولا ، بوضع $\phi=\frac{\pi}{2}-\theta$ لإيجاد الزاوية المطلوبة والتي عندها تسقط الكرة.

مثال ٤:

أسطوانة مصمتة نصف قطرها a وكتلتها M تتدحرج بدون انزلاق علي مستوي مائل زاويته α. أ- أثبت أن العجلة تكون ثابتة وتساوي: $(2g\sin\alpha)/3$

ب- أثبت أن معامل الاحتكاك يجب أن تساوي $(\tan\alpha)/3$ على الأقل.

الحـــل

شكل (٨- ٥)

نفرض أن الأسطوانة كانت في البداية تلامس المستوي عند 0 وأنه بعد زمن t تكون الأسطوانة قد دارت زاوية θ أنظر الشكل (٨- ٥). القوي التي تؤثر على الأسطوانة عند اللحظة t هي:

(i) الوزن mg الذي يؤثر رأسيا لأسفل عند مركز الكتلة.

(ii) رد الفعل R للمستوي المائل ويؤثر عموديا على المستوي .

(iii) قوة الاحتكاك f وتؤثر في اتجاه ينطبق على المستوي المائل إلي أعلي.

سوف نختار المستوي xy ليكون المستوي الذي تحدث فيه الحركة بحيث يكون الاتجاه الموجب للمحور x في اتجاه السطح المائل إلى أسفل وتكون نقطة الأصل عند 0.

إذا كان $\vec{r}$ هو متجه موضع مركز الكتلة في اللحظة t فإنه حسب نظرية كمية الحركة الخطية يكون:

$$M\ddot{\vec{r}} = M\vec{g} + \vec{R} + \vec{f} \qquad (1)$$

ولكن:

$$\vec{g} = g\sin\alpha\,\vec{i} - g\cos\alpha\,\vec{j}, \quad \vec{R} = R\vec{j}, \quad \vec{f} = -f\vec{i}$$

عندئذ يمكن كتابة (١) على الصورة:

$$M\ddot{\vec{r}} = (Mg\sin\alpha - f)\vec{i} + (R - Mg\cos\alpha)\vec{j} \qquad (2)$$

عزم الدوران الخارجي الكلي حول المحور الأفقي المار بمركز الكتلة هو:

$$\vec{\Lambda} = 0 \wedge M\vec{g} + 0 \wedge \vec{R} + C\vec{B} \wedge \vec{f} = C\vec{B} \wedge \vec{f} = (-a\vec{j}) \wedge (-f\vec{i}) = -af\vec{k} \qquad (3)$$

وكمية الحركة الزاوية الكلية حول المحور الأفقي المسار بمركز الكتلة هي:

$$\vec{\Omega} = I_C\vec{\omega} = I_C(-\dot{\theta}\vec{k}) = -I_C\dot{\theta}\vec{k} \qquad (4)$$

حيث I_C هو عزم القصور الذاتي للأسطوانة حول هذا المحور:

بالتعويض من (٣) و (٤) في $\Lambda = \frac{d\Omega}{dt}$ نجد أن:

$$I_C\ddot{\theta} = af \quad \text{أو} \quad -af\vec{k} = -I_C\ddot{\theta}\vec{k}$$

باستخدام $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ في (٢) نحصل علي:

$$M\ddot{x} = Mg\sin\alpha - f, \quad M\ddot{y} = R - Mg\cos\alpha \qquad (5)$$

والآن إذا لم يكن هناك انزلاق فإن $a\theta = x$ أو $\theta = \frac{x}{a}$ بالمثل حيث أن الأسطوانة تظل علي المستوي المائل فإن $y = 0$ وينتج من (٥) أن:

$$R = Mg\cos\alpha$$

بالتعويض عن: $\theta = \frac{x}{a}$ في: $I_C\ddot{\theta} = af$ نجد أن:

$$f = I_C\ddot{x} / a^2$$

ونعلم أن: $I_C = \frac{1}{2}Ma^2$ عندئذ بالتعويض $f = \frac{1}{2}M\ddot{x}$ في المعادلة الأولي من (٥) نحصل علي: $\ddot{x} = \frac{2}{3}g\sin\alpha$

ب- نعلم أن معامل الاحتكاك هو: $\mu = \frac{f}{R}$

من بند السابق (أ) لدينا: $f = \frac{1}{2}M_x = \frac{1}{3}Mg\sin\alpha$, $\quad Mg\cos\alpha = R$

ولكي لا يحدث انزلاق فيجب أن يكون معامل الاحتكاك μ على الأقل:

$$\frac{f}{R} = \frac{1}{3}\tan\alpha$$

مثال ٥:

أ- حل المثال السابق (٤) على أساس أن معامل الاحتكاك بين الاسطوانة والمستوي المائل هو μ · ب) ناقش الحركة عند قيم مختلفة لمعامل الاحتكاك μ.

الحل

أ- في المعادلة (٥) من المثال السابق ، نعوض عن $f = \mu R = \mu Mg\cos\alpha$

فنحصل على: $x = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$

نلاحظ أن مركز كتلة الأسطوانة في هذه الحالة يتحرك بنفس الطريقة مثل جسيم ينزلق على المستوي إلى أسفل لكن الأسطوانة يمكن لها أن تنزلق أو تتدحرج على السواء.

عجلة التدحرج هي:

$$a\ddot{\theta} = \frac{a^2 f}{I_C} = \frac{a^2\mu Mg\cos\alpha}{\frac{1}{2}Ma^2} = 2\mu g\cos\alpha$$

وعجلة الانزلاق هي:

$$\ddot{x} - a\ddot{\theta} = g(\sin\alpha - 3\mu\cos\alpha)$$

ب- إذا كان:

$$\mu < \frac{1}{3}\tan\alpha \quad \text{فإن} \quad (\sin\alpha - 3\mu\cos\alpha) > 0$$

وعندئذ يجب أن يحدث انزلاق. إذا كان:

$$\mu \geq \frac{1}{3}\tan\alpha \quad \text{فإن} \quad (\sin\alpha - 3\mu\cos\alpha) \leq 0$$

وعندئذ يحدث التدحرج وليس الانزلاق وهذه النتائج تتفق مع نتائج المثال السابق(٤).

الملاحق

ملحق (١)

- أنظمة الإحداثيات ومعادلات التحويل
- الإحداثيات الكرتيزية
- الإحداثيات الأسطوانية
- الإحداثيات القطبية الكروية
- دوران محاور الإحداثيات
- طول قوس المنحنى فى الاحداثيات المختلفة

ملحق (١)

أنظمة الإحداثيات ومعادلات التحويل

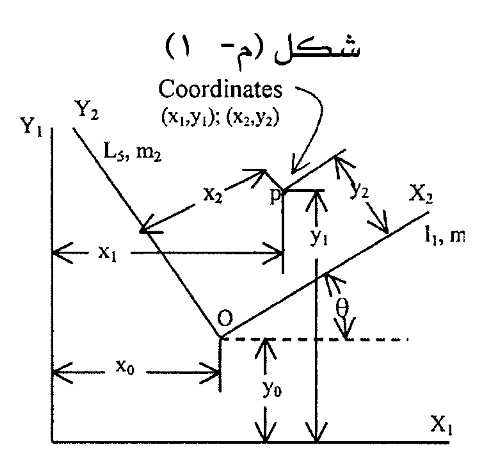
يتحدد موضع أي نقطة مادية في الفراغ إذا علمت ثلاث كميات مستقلة تسمى بالإحداثيات. وفي الواقع هناك أكثر من اختيار لهذه الإحداثيات، فيمكن تحديد موقع النقطة المادية باستخدام الإحداثيات الكرتيزية (x,y,z)، أو باستخدام الإحداثيات الأسطوانية (ρ,ϕ,z)أو باستخدام الإحداثيات القطبية الكروية (r,θ,ϕ).

أ) الإحداثيات الكرتيزية: Rectangular coordinate

نعتبر في البداية الإحداثيات الكرتيزية لنقطة مادية عند النقطة p في بعدين فقط (أي في مستوى وليس في الفراغ) كما هو موضح بشكل (م- ١).

إحداثيات النقطة p بالنسبة للمحورين الكرتيزيين المتعامدين X_1, Y_1 نفرض أنهما x_1, y_1 على الترتيب. أما إحداثيات نفس النقطة pبالنسبة للمحورين الكرتيزيين المتعامدين X_2, Y_2 نفرض أنهما x_2, y_2 مع ملاحظة أن المحورين X_2, Y_2 لهما

شكل (م- ١)



نقطة أصل مختلفة وكذلك حدث لها دوران بزاوية θ، كما هو مبين بشكل (م- ١).

والآن يمكننا كتابة معادلات التحويل لإحداثيات النقطة p بين نظامى الإحداثيين السابقين على الصورة التالية:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_\circ + x_2\cos\theta - y_2\sin\theta \\ y_1 &= y_\circ + x_2\sin\theta - y_2\cos\theta \end{aligned} \qquad (1)$$

مع ملاحظة أن x_1, y_1 كل منها دالة في المتغيرين X_2, Y_2. والمعادلة (١) يمكن كتابتها في الصورة التالية:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_\circ + \ell_1 x_2 + \ell_2 y_2 \\ y_1 &= y_\circ + m_1 x_2 + m_2 y_2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

حيث ℓ_1, m_1 هي جيوب تمام الإحداثي X_2 بالنسبة الإحداثيين X_1, Y_1 بينما ℓ_2, m_2 هي جيوب تمام الإحداثي Y_2 بالنسبة للإحداثيين X_1, Y_1.

أما إذا كانت نقطة أصل المحورين X_2, Y_2 تحرك بسرعة ثابتة (مركباتها v_x, v_y) بالنسبة للمحورين X_1, Y_1 وكذلك المحورين X_2, Y_2 يدوران بسرعة زاوية منتظمة ولتكن ω حيث $\theta = \omega t$.

فتصبح المعادلتان (١)، (٢) في هذه الحالة على النحو التالي:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= v_x t + x_2\cos\omega t - y_2\sin\omega t \\ y_1 &= v_x t + x_2\sin\omega t + y_2\cos\omega t \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ويلاحظ في الحالة الأخيرة أن x_1, y_1 كل منها أصبح دالة في ثلاثة متغيرات هي x_2, y_2, t.

ومعادلات التحويل السابقة يمكن كتابتها على الصورة العامة التالية:

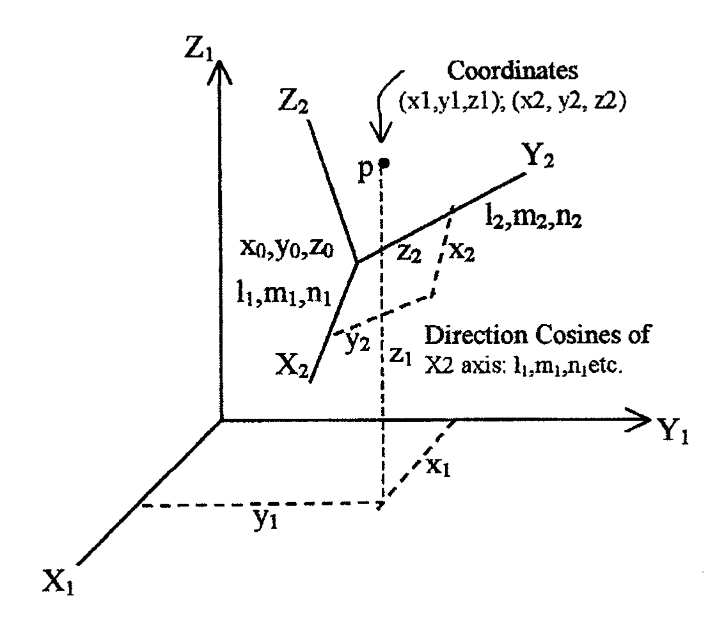
$$x_1 = x_1(x_2, y_2, t) \quad , \quad y_1 = y_2(x_2, y_2, t).$$

وعموما في الإحداثيات الكرتيزية المتعامدة في الفراغ الثلاثي يمكن تعميم النتائج السابقة بسهولة وذلك باعتبار الشكل التالي (م- ٢).

حيث أنه واضح من الرسم أن إحداثيات النقطة p هي x_1, y_1, z_1 بالنسبة للمحاور X_1, Y_1, Z_1 بينما احداثياتها بالنسبة للمحاور X_2, Y_2, Z_2 هي x_2, y_2, z_2 وعلاقات التحويل بين النظامين يصبح:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_\circ + \ell_1 x_2 + \ell_2 y_2 + \ell_3 z_2 \\ y_1 &= y_\circ + m_1 x_2 + m_2 y_2 + m_3 z_2 \\ z_1 &= z_\circ + n_1 x_2 + n_2 y_2 + n_3 z_3 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

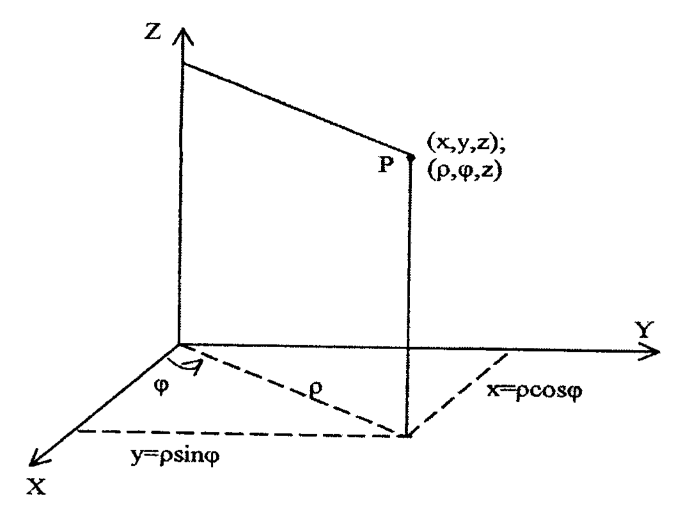
شكل (م- ٢)



حيث ℓ_1, m_1, n_1 جيوب تمام الإحداثي X_2 بالنسبة لنظام المحاور X_1, Y_1, Z_1 وبالمثل (ℓ_3, m_3, n_3)، (ℓ_2, m_2, n_2) جيوب تمام الإحداثيين Y_2, Z_2 بالنسبة لنظام المحاور X_1, Y_1, Z_1 على الترتيب.

ب) الإحداثيات الأسطوانية: The cylindrical coordinates

شكل (م- ٣)

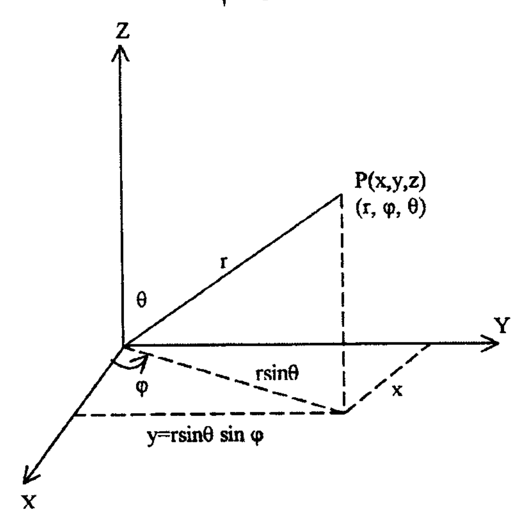


وهي فيها طولين وزاوية وعلاقات التحويل بين إحداثيات أي نقطة p بالنسبة لمحاور كرتيزية متعامدة (x,y,z) والإحداثيات الأسطوانية (ρ,ϕ,z) يعطى على الصورة:

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad z = z \qquad (5)$$

جـ) الإحداثيات القطبية الكروية: The Spherical coordinates

شكل (م- ٤)



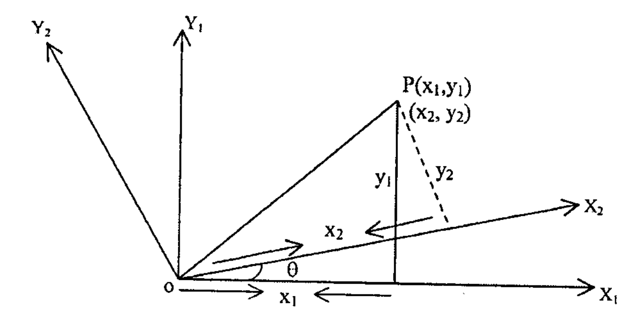
وهي فيها زاويتان ϕ,θ وطول r كما بالرسم، والعلاقات بينها وبين الإحداثيات الكرتيزية x,y,z لأي نقطة في الفراغ الثلاثي تعطى على النحو التالي:

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta \qquad (6)$$

ويلاحظ أن x,y كل منها دالة في (r, θ, ϕ) بينما z دالة فقط في r,θ.

ملاحظة عن دوران محاور الإحداثيات:

شكل (م- ٥)



نفرض أنه لدينا نظامين احداثيين قائمين متحدين بنقطة الأصل o.

ولنفرض كذلك أن الزاوية من ox_1 إلى ox_2 هي θ. لتكن p نقطة من المستوى ولتكن α هي الزاوية المحصورة بين ox_2 ، op. إحداثيات p بالنسبة للنظام X_1oY_1 هما (x_1,y_1) وبالنسبة للنظام X_2oY_2 هما (x_2,y_2) عندئذ يكون:

$$\frac{x_1}{op} = \cos(\theta+\alpha) = \cos\theta\sin\alpha - \sin\theta\sin\alpha \qquad (1)$$

ولكن:

$$\sin\alpha = \frac{y_2}{op} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{x_2}{op} \qquad (2)$$

من (٢) في (١) نجد أن:

$$\frac{x_1}{op} = \frac{x_2}{op}\cos\theta - \frac{y_2}{op}\sin\theta$$

وفيها نجد أن:

$$x_1 = x_2\cos\theta - y_2\sin\theta$$

ويمكننا بشكل مماثل أن نرى:

$$y_1 = x_2\sin\theta + y_2\cos\theta$$

طول قوس المنحنى فى الاحداثيات المختلفة

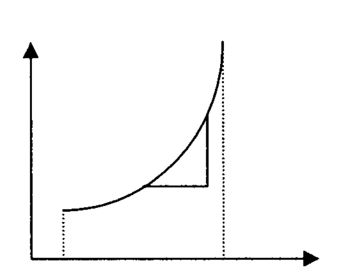
(١) طول قوس من منحنى في الإحداثيات الكارتيزية في المستوى

$$(d\ell)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + y'}\, dx$$



(٢) عنصر الطول في الإحداثيات الكارتيزية في الفراغ

$$\ell = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

$$\ell = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$$

حيث $x' = \frac{dx}{dt} \quad , \quad y' = \frac{dy}{dt} \quad , \quad z' = \frac{dz}{dt}$

(٣) طول قوس من منحنى في المستوى بإستخدام الإحداثيات القطبية

$$(d\ell)^2 = (dr)^2 + (r\, d\theta)^2$$

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\theta$$

حيث $r' = \frac{dr}{d\theta}$

(٤) طول عنصر قوس في الإحداثيات الكرويه

$$d\ell = \sqrt{(dr)^2 + (r\,d\theta)^2 + (r\sin\theta d\theta)^2}$$

(٥) طول عنصر القوس على سطح كروي $r = a$

نصف القطر ثابت $r = a$ أي $dr = 0$

$$d\ell = a\sqrt{(a\,d\theta)^2 + (\sin\theta\,d\phi)^2}$$

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} a\sqrt{\theta'^2 + \sin^2\theta}\,d\theta \quad , \quad \theta' = \frac{d\theta}{d\phi}$$

(٦) طول عنصر القوس على سطح أسطوانة دائرية نصف قطرها a

$r == a = const.$ و $dr = 0$

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{a^2(d\theta)^2 + (dz)^2}\,d\theta \quad , \quad z' = \frac{dz}{d\theta}$$

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{a^2 + z'^2}\,d\theta \quad , \quad z' = \frac{dz}{d\theta}$$

وعلى سطح المخروط $\theta = c$, $d\theta = 0$

$$d\ell = \sqrt{(dr)^2 + 0 + (dz)^2} \quad , \quad \tan\alpha = \frac{r}{z}$$

حيث α هي الزاوية من الراسم ومحور المخروط.

ملحق (٢)

ملحق (٢)

معادلة أويلر لاجرانج

تسمى المعادلة

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \qquad (1)$$

معادلة أويلر لاجرانج وهي معادلة تفاضلية (أنظر الفصل الرابع) من الرتبة الثانية وحيث أن المعادلة التفاضلية (1) حلها يعطى ثابتين إختياريين يمكن تعينهما من الشروط الحدية عند نقطتي البداية والنهاية للمنحنى المراد تعينه. وهي تعطى الشرط الضروري للحصول على المنحنى الأمثل $y=y(x)$ الذي قيمة التكامل الآتي:

$$\mathrm{I}=\int_a^b F(x,y,y')dx \quad (2)$$

قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) Extremum .

تعرف أيضاً المعادلة (1) المنحنيات التى تسمى بالحلول المتطرفة أو التوقيفية للتكامل (2) Extremals

مع ملاحظة إذا كان منحنى التوقف (الحل المتطرف) يتكون من أكثر من فرع فإنه من الضروري أن نتأكد من أن نقطتي البداية والنهاية a, b يقعان على نفس الفرع.

مثال (١)

أوجد معادلة المنحنى الواصل بين النقطتين $(0,0)$, $(1,a)$ والذى يجعل التكامل التالي قيمة توقف

$$\mathrm{I}=\int_0^1 \left(y^2+y'^2+2y\,e^x\right)dx$$

الحل

الدالة F هي:

$$F(x,y,y')=y'+y'^2+2y\,e^x \quad (1)$$

ومنها نجد أن

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2y+2e^x \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=2y' \quad (3)$$

بالتعويض في معادلة اويلر لاجرانج نحصل على

$$y+e^x-y''=0$$

$$y''-y=e^x \quad (4)$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية حلها يعطى من حل المعادلة المتجانسة وهو $y''-y=0$

$$y_c=A\,e^{-x}+B\,e^x \quad (5)$$

والحل الخاص y_p للمعادلة غير المتجانسة

$$y_p=\frac{1}{D^2-1}\left\{e^x\right\}=\frac{1}{2}x\,e^x \quad (6)$$

والحل العام للمعادلة (4) سيكون

$$y = y_c + y_p = A e^{-x} + B e^{x} + \frac{1}{2} x e^{3} (7)$$

وحيث أن الحل المتطرف للمنحنى المطلوب يجب أن يمر بنقطتي النهاية $(0,0)$, $(1,a)$ فهذا يجعلنا نعين الثوابت B , A في المعادلة (7)

$$A + B = 0$$

$$a = A e^{-1} + B e + \frac{1}{2} e$$

بالتعويض عن $A = -B$ من المعادلة الأولى في الثانية

$$a = b\left(-e^{-1} + e\right) + \frac{e}{2}$$

$$B = \frac{\left(a - \frac{e}{2}\right)}{e - e^{-1}} = \alpha$$

$$A = -\frac{\left(a - \frac{e}{2}\right)}{e - e^{-1}} = -\alpha$$

بالتعويض في المعادلة (7) نحصل على

$$y = 2\alpha \sinh x + \frac{1}{2} x e^{x}$$

$$y = \alpha\left(e^{x} - e^{-x}\right) + \frac{1}{2} x e^{x} \ (8)$$

والمعادلة (8) تمثل معادلة المنحنى الذى يجعل التكامل المعطى قيمة توقف.

تعميم لمعادلة أويلر - لاجرانج للدالة F ذي التفاضلات من الرتب العليا

تستخدم معادلة أويلر – لاجرانج لإيجاد معادلة المنحنى $y = y(x)$ والذي يجعل التكامل

$$I = \int_a^b F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right)\, dx$$

نهاية قصوى (وهي شرط ضروري) تأخذ الصورة

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^n}\right) = 0$$

وهي معادلة تفاضلية تعتبر تعميم لمعادلة أويلر – لاجرانج في حالة وجود مشتقات تفاضلية من الرتبة n .

معادلة أويلر – لاجرانج والشروط الضرورية والكافية لها:

على الرغم من أن معادلة أويلر – لاجرانج تعطى فقط الشرط الضرورى الذى يجعل التكامل I قيمة توقف فإنه من الممكن أن نختبر مباشرةً إذا كانت قيمة التوقف قيمة صغرى أو عظمى وهذا واضح من التكامل

$$I = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

وكما سبق في الفصل الرابع (لإيجاد المنحنى الأمثل والذي يجعل قيمة التكامل قيمة قصوى) إعتبرنا ε بارامتر ، ξ متغيراً إختيارياً فهنا يوجد عدد لا نهائي من المسارات يمكن أن يصل بين a ، b ولكن يوجد مسار واحد فقط يجعل التكامل نهاية صغرى وبالتالي يصبح التكامل

$$I+\delta I=\int_a^b F\left(x,y+\varepsilon\xi,y'+\varepsilon\xi'\right)dx$$

وبإستخدام ماكلورين

$$F\left(x,y+\varepsilon\xi,y'+\varepsilon\xi'\right)=F\left(x,y,y'\right)+\varepsilon\left[\xi\frac{dF}{dy}+\xi'\frac{dF}{dy'}\right]+$$

$$\frac{\varepsilon^2}{2!}\left[\xi^2\frac{\partial^2F}{\partial y^2}+2\xi\xi'\frac{\partial^2F}{\partial y\,y'}+\xi'^2\frac{\partial^2F}{\partial y'^2}\right]+0\left(\varepsilon^3\right)$$

$$\therefore I=\varepsilon\int_a^b\left[\xi\frac{\partial F}{\partial y}+\xi'\frac{\partial F}{\partial y'}\right]+$$

$$\frac{\varepsilon^2}{2!}\int_a^b\left[\xi^2\frac{\partial^2F}{\partial y^2}+2\xi\xi'\frac{\partial^2F}{\partial y\,\partial y'}+\xi'^2\frac{\partial^2F}{\partial y'^2}\right]+0\left(\varepsilon^2\right)$$

الشرط الكافي لكي يكون I قيمة عظمى

$$I_1=0 \quad and \quad I_2<0$$

الشرط الكافي لكي يكون I قيمة صغرى

$$I_1=0 \quad and \quad I_2>0$$

ومن ثم فإن $I_1=0$ ونحصل على

$$\int_a^b \xi(x)\left[F_y-\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)\right]dx=0$$

وحيث أن $\xi(x)$ إختيارية فإن

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

وهذه هي معادلة أويلر – لاجرانج .

مثال (٢):

أوجد معادلة منحنى التوقف الواصل بين النقطتين $(1,1)$ ، $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ والذي يجعل التكامل $I=\int x^2 y'^2\,dx$ قيمة قصوى وهل القيمة عظمى أم صغرى ؟

الحل

بما أن $F(x,y,y')=x^2y'^2$ ومنها نوجد $\frac{\partial F}{\partial y}$ ، $\frac{\partial F}{\partial y'}$ والتعويض في معادلة أويلر – لاجرانج فنحصل على

$$\frac{d}{dx}\left(2x^2y'\right)=0$$

وحل هذه المعادلة يعطى

$$y=-\frac{A}{x}+B$$

وبإستخدام الشروط الركنية نحصل على $A=-1$, $B=0$

$$y=\frac{1}{x}$$

وهى معادلة قطع زائد قائم يقع في الربع الموجب

(لاحظ أن النقط $a=(1,1)$, $b=\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ تعطى نفس منحنى التوقف إلا أن النقطة $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ تقع على فرع آخر وفي الربع السالب وأن منحنى التوقف لا يمر بنقطة الأصل)

بعد إيجاد منحنى التوقف $\varepsilon_0:\ y=\frac{1}{x}$

نفرض أن هناك منحنى آخر بحيث أن

$$\varepsilon:\ y=\frac{1}{x}+\xi(x) \qquad where \quad \xi(x)\in c_2\ ,\ \xi(1)=0\ ,\ \xi(2)=0$$

نحسب التكامل

$$I(\varepsilon)=\int_1^2 x^2\left(-\frac{1}{x^2}+\xi'\right)^2 dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}-2\xi'+x^2\xi'^2\right)dx$$

$$=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx+\int_1^2 x^2\xi' dx-2\int_1^2\xi' dx$$

$$\therefore I(\varepsilon_0)+\int_1^2 x^2\xi^2 dx-0$$

$$I(\varepsilon)-I(\varepsilon_0)=\int_1^2 x^2\xi'^2 dx>0$$

وهذا يعني أن $I(\varepsilon)>I(\varepsilon_0)$

وحيث إن η' متجه اختياري ومن ثم فإن منحنى التوقف يعطي قيمة صغرى للتكامل وهذه القيمة

$$I(\varepsilon_o) = \int_1^2 \frac{1}{x^2} \, d\,x = \frac{1}{2}$$

بعض الحالات الخاصة لمعادلة أويلر ـ لاجرانج :

نعلم أن معادلة أويلر ـ لاجرانج

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\because \quad F = F(x, y, y')$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial y'} dy'$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \; y' + \frac{\partial F}{\partial y'} \; y''$$

فتصبح معادلة أويلر ـ لاجرانج

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \frac{dy}{dx}\right] = 0$$

or

$$F_y - F_{x\,y'} - F_{y\,y'} - F_{y'y'} - y'' = 0$$

الحالة الأولى : إذا كانت $F = F(x, y)$

فإن $F_{x\,y'} = F_{y\,y'} = F_{y'y'} = 0$ وتصبح معادلة أويلر ـ لاجرانج

$$F_y = 0$$

الحالة الثانية : إذا كانت $F = F(y')$

فإن $F_y = F_{xy'} = F_{yy'} = 0$ وتصبح معادلة أويلر ـ لاجرانج

$$F_{y'y'}\, y'' = 0$$

ومنها إما $y'' = 0 \Rightarrow y = c_1 x + c_2 y$

أو $F_{y'y'} = 0$ $y' = k$, جذر حقيقي $\Rightarrow y = k_1 x + c$

الحالة الثالثة : إذا كانت $F = F(x, y')$

فإن $F_y = 0$

وتصبح معادلة أويلر ـ لاجرانج

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

ومنها $\frac{\partial F}{\partial y'} = c_1$

الحالة الرابعة : إذا كانت $F = F(x, y, y')$

$$\because \frac{dF}{dx} = F_x + F_y\, y' + F_{y'}\, y'' \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\left(y' F_{y'}\right) = y' \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) + F_{y'}\, y'' \qquad (2)$$

بطرح (1) من (2) نحصل على :

$$\frac{d}{dx}\left[F - y' F_{y'}\right] = F_x + F_y\, y' - y' \frac{d}{dx}\left[F_{y'}\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left[F - y' F_{y'}\right] = F_x + y'\left[\underbrace{F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)}_{0}\right]$$

وتصبح معادلة أويلر ـ لاجرانج على الصورة :

$$\frac{d}{dx}\left[F - y' F_{y'}\right] - F_x = 0$$

الحالة الخامسة : $F = F(y, y')$ أي F لا تعتمد صراحة على x

$$\therefore\ \frac{d}{dx}\left[F - y'F_{y'}\right] - 0 = 0$$

$$F - y'F_{y'} = \text{const.}$$

مثال (٣) :

إذا سقط جسيم كتلته m تحت تأثير وزنه فقط فادرس حركته إذا كانت طاقة الحركة $T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$ وطاقة وضعه $V = - m g y$.

الحل :

$$\because\ I = m \int_{t_o}^{t} \left(\frac{\dot{y}^2}{2} + g y \right) dt$$

حيث ما تحت التكامل هو دالة لاجرانج $\ell = T - V$

باستخدام معادلة أويلر - لاجرانج (مع تبديل x بـ t $\left(F(t, y, y') = \left(\frac{\dot{y}}{2} + g y \right)\right)$

نحصل على :

$$\frac{d}{dt}(\dot{y}) - g = 0$$

$$\ddot{y} = g$$

ومنها

$$\dot{y} = g t + \alpha \quad , \quad y = \frac{1}{2} g t^2 + \alpha t + \beta$$

باستخدام الشروط نوجد α ، β

ولدراسة طبيعة قيمة التوقف وذلك بحساب التكامل I على المنحنى المتغير

$$Y(t) = y(t) + \eta(t)$$

حيث $\eta(t) \in C_2$ ، $\eta(t_o) = \eta(t_1) = 0$

$$I(Y) = m\int_{t_o}^{t_1}\left[\frac{1}{2}(y'+\eta')^2 + g(y+\eta)\right]dt$$

$$= I(y) + m\int_{t_o}^{t}\left[y'\eta' + y'' + \frac{1}{2}\eta'^2\right]dt$$

$$= I(y) + m\int_{t_o}^{t}\frac{d}{dt}(y'\eta)\,dt + \frac{m}{2}\int_{t_o}^{t}\eta'^2\,dt$$

وحيث إن η تنعدم عند كل من t_o ، t_1 فإن :

$$I(Y) - I(y) = \frac{m}{2}\int_{t_o}^{t}\eta'^2\,dt > 0$$

وعلى ذلك فإن المعنى y يعطي قيمة صغرى للتكامل.

والتغير هنا تغير قوي لأن المجال محافظ ولا يوجد قيود على الحركة.

مثال (٤) : أوجد منحنى القيمة القصوى للتكامل

$$I = \int_{x_o}^{x_1}(y + x\,y')\,dx$$

الحل :

$$\because\ F(x, y, y') = y + x\,y'$$

بحساب كل من F_y ، $F_{y'}$ والتعويض في معادلة أويلر ـ لاجرانج نحصل على :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x)$$

إذاً معادلة أويلر ـ لاجرانج تتحول إلى متطابقة ومن ثم فإن التكامل لا يعتمد على المسار ومن ثم فقيمة التكامل تعتمد على نقطة البداية والنهاية ولا تعتمد على مسار التكامل ومن ثم فإن مسألة حساب التغيرات لا معنى لها.

مثال : أوجد مجموعة المنحنيات $y = y(x)$ التي تجعل قيمة التكامل

$$I = \int_{0}^{\pi/2} \left[y'^2 - y^2 \right] dx$$

قيمة قصوى ثم حدد نوعها والتي تحقق الشروط المركبة $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ، $y(0) = 0$

الحل :

بما أن الدالة $F(x, y, y') = y'^2 - y^2$

بتطبيق معادلة أويلر ـ لاجرانج ($F_y = -2y \ , F_{y'} = 2y''$)

نحصل على :

$$y'' + y = 0$$

والتي حلها

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

بتطبيق الشروط نحصل على $C_1 = 0$ ، $C_2 = 1$

وتكون :

$$y(x) = \sin x$$

وهذه هي معادلة المنحنى الذي يجعل قيمة التكامل قيمة قصوى وتحديد نوع النهاية كما سبق في الأمثلة السابقة أو بتطبيق شروط لاجندر (أو فيرشتراس) وهو بمعرفة إشارة $F_{y'y'}$ كالآتي:

$$\because \ F(x, y, y') = y'^2 - y^2$$

$$\therefore \ F_{y'} = 2y' \ , \ F_{y'y'} = 2 > 0$$

فيكون نوع النهاية نهاية صغرى.

مثال :

أوجد منحنى الدالة $y = y(x)$ الذي يجعل التكامل $I = \int_0^1 [y^2 + x^2 y'] dx$ قيمة قصوى وحدد نوعها علماً بأنه يحقق الشروط الركنية $y(0) = 0 , y(1) = 0$

الحل :

الدالة $F(x, y, y') = y^2 + x^2 y'$

بتطبيق معادلة أويلر ـ لاجرانج $\left(F_y = 2y, F_{y'} = x^2\right)$ فنحصل على :

$$y = x$$

الشرط الحدي الأول متحقق ولكن الشرط الثاني يتحقق فقط إذا كانت $a = 1$ ولكن إذا كانت $a \neq 1$ فإنه لا توجد منحنيات قصوى تحقق الشروط الحدية لتحديد نوع القيمة القصوى (عظمى أو صغرى).

من شرط لاجندر $F_{y'y'} > 0$ للقيمة الصغرى، $F_{yy'} < 0$ للقيمة العظمى، وحيث إن $F_{y'y'} = 0$ نظراً لأن المنحنى خط مستقيم فإن القيمة لا عظمى ولا صغرى.

مثال : أوجد معادلة أقصر بعد بين نقطتين على سطح كرة.

الحل :

في الإحداثيات الكروية (r, θ, ϕ)

مربع طول عنصر القوس

$$dS^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta (d\phi)^2$$

على سطح الكرة $r = a$ فإن $dr = 0$ ويكون

$$(dS)^2 = 0 + (a\, d\theta)^2 + (a \sin\theta\, d\phi)^2$$

المطلوب إيجاد القيمة الصغرى للتكامل :

$$I = \int dS = \int \sqrt{(a\,d\theta)^2 + (a\sin\theta\,d\phi)^2}$$

$$= a\int \sqrt{\theta'^2 + \sin^2\theta}\;d\theta \quad , \quad \theta' = \frac{d\theta}{d\phi}$$

بتطبيق معادلة أويلر ـ لاجرانج

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{d}{d\phi}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta'}\right) = 0$$

حيث

$$F(\phi, \theta, \theta') = \sqrt{\theta'^2 + \sin^2\theta}$$

نحصل على :

$$\frac{\sin\theta\;\cos\theta}{\sqrt{\theta'^2 + \sin^2\theta}} - \frac{d}{d\phi}\left(\frac{\theta'}{\sqrt{\theta'^2 + \sin^2\theta}}\right) = 0$$

ومنها بعد الاختصار

$$\sin\theta\;\theta'' - 2\sin\theta\,\theta'^2 - \sin^2\theta\;\cos\theta = 0$$

نفرض أن :

$$\theta' = p \Rightarrow \theta'' = \frac{dp}{d\phi} \quad , \frac{dp}{d\theta}.\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{dp}{d\theta}.p$$

$\therefore$ المعادلة التفاضلية تصبح :

$$p\frac{dp}{d\theta}\sin\theta - 2\cos\theta\;p^2 = \sin^2\theta\cos\theta$$

بوضع كل من $p^2 = w$ فإن

$$\frac{dw}{d\theta} = 2p\frac{dp}{d\theta}$$

$$\therefore \frac{dw}{d\theta} - 2w\cot\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

وهذه معادلة خطية لها عامل التكامل

$$\mu = e^{-4\int \cot\theta\,d\theta} = e^{-4\lim\sin\theta} = \frac{1}{\sin^4\theta}$$

بالضرب في عامل التكامل ثم التكامل للمعادلة التفاضلية السابقة نحصل على :

$$\frac{1}{\sin^4\theta}w=\int\frac{1}{\sin^4\theta}.2\sin\theta\cos\theta\,d\theta+C$$

$$\therefore\ \frac{p^2}{\sin^4\theta}=-\frac{1}{\sin^2\theta}+C$$

$$p^2=C\sin^4\theta-\sin^2\theta$$

$$p=\frac{d\theta}{d\phi}=\sqrt{C\sin^4\theta-\sin^2\theta}=\sin\theta\sqrt{C\sin^2\theta-1}$$

بفصل المتغيرات ثم التكامل نحصل على :

$$\int\frac{d\theta}{\sin\theta\sqrt{C\sin^2\theta-1}}=\int d\phi$$

$$\therefore\ \sin^{-1}\left(\frac{\cot\theta}{A}\right)=-\phi+\beta$$

حيث $A^2=C-1$ ، β ثابت تكامل.

المراجع

المراجع الأجنبية

1) Solutions of Problems in Applied Mechanics.
By A.N. Gobby.

2) A text book of "Applied Mechanics".
By R.S. Khurmi

3) The Elementary of Statics and Dynamics.
By S.L. Loney.

4) Calculus of Variations, Routledge & Kegan Paul Lane, 1975. by: Arthurs A. M. ,

5) Analytical Dynamics Published:10/1998 Publisher: McGraw-Hill by: Haim Baruh

6) Analytical mechanics Published:August1995. Brace Publisher: Harcourt by: Grant R. Fowles

7) Analytical Mechanics Published:11/1998 Publisher: Cambridge University Press, by: Louis N. Hand, Janet D. Finch

المراجع العربية

م	المؤلف	اسم الكتاب	المترجم	دار النشر	عام
١	موراى ر. شبيجل	الميكانيكا العامة وتطبيقاتها	د.أحمد فؤاد باشا	دار ماكروهيل	١٩٦٧
٢	س. تيموشنكو، د.هـ.ينج	الديناميكا العالية	د. حماد يوسف حماد د. الفونس رياض يعقوب	مكتبة الأنجلو المصرية	١٩٧٠
٣	كرانت ر. فاولس	الميكانيك التحليلي	د.طالب ناهي الخفاجي	وزارة التعليم والبحث العلمي- بغداد	١٩٧٠
٤	ج.ل. ليتش	الميكانيك التقليدية	د. فوزي غالب عوض د. عبد الملك عبد الرحمن	عمادة شؤون المكتبات - جامعة الملك سعود الرياض.	١٩٨٦
٥	د.إبراهيم محمد النعسان	الميكانيك التحليلي		مطبوعات جامعة دمشق	١٩٨٩
٦	ف. جانتماخر	الميكانيكا التحليلية	د. محمد إسماعيل	دار مير للطباعة والنشر.	١٩٧١